

C 余弦函数的概率型逼近问题

李晓敏

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:借助于算子值数学期望以及概率论方法,利用 C 余弦函数与 C 半群之间关系、Taylor 展开式、Hölder 不等式及适当的随机变量矩生成函数等工具,得到 C 余弦函数概率型逼近表达式及其更一般的结论,并利用推得的结论从生成元的角度给出了 C 余弦函数概率型逼近的指数公式。

关键词: C 余弦函数;泰勒展开式;矩生成函数;概率型逼近

中图分类号: O177 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2014)04-0018-03

近年来算子的表示和逼近得到了广泛的发展,Pfeifer^[1-4]给出了 C_0 半群的形式简单而又普遍适用的概率表示式,并提供了这些公式收敛速度的精确估计;陈文忠等^[5-6]对于 C_0 半群及 C 半群概率型的表示做了深入的研究;指数有界 C 余弦函数的概念由 Tanaka^[7]引入,同时在 C 具稠值域时引入了其完全无穷小生成元的概念,并给出了指数有界 C 余弦函数的生成定理极其对二阶抽象 cauchy 问题的应用。

本文在半群概率型逼近基础上讨论了指数有界 C 余弦函数的概率型逼近问题,利用指数有界 C 余弦函数与 C 半群之间关系推得的泰勒展开式(引理3)及 Hölder 不等式,得到了 C 余弦函数概率型逼近表达式(定理2),从而推出了其更一般的概率型逼近结论(推论1),并利用所得结论从生成元的角度给出了 C 余弦函数概率型逼近的指数公式(定理3)。

1 C 余弦函数的定义及性质

假设 X 是 Banach 空间, $B(X)$ 为 X 上的一切有界线性算子的集合, $D(A)$ 表示 A 的定义域, $R(A)$ 表示 A 的值域, $C \in B(X)$ 。

定义 1^[7] 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $C \in B(X)$ 为单射,若算子 $C: R \rightarrow B(X)$ 满足

- (1) $C(t+s)C + C(t-s)C = 2C(t)C(s), \forall t, s \in R;$
- (2) $C(0) = C;$

(3) $t \rightarrow C(t)x$ 对每一固定的 $x \in X$ 在 R 上是连续的;

(4) 存在 $M, \omega \geq 0$, 使得 $\|C(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$ 。则 $C: R \rightarrow B(X)$ 称为是 X 上的一个指数有界的强连续 C 余弦函数,简称为指数有界的 C 余弦函数,记作 $C(t) \in G(M, \omega)$ 。

性质 1 易于验证 $C(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2}$ 满

足(1)、(2)、(3),故它是余弦函数,其中 $h(t)$ 是 B 生成的 C_0 半群, $A = B^2$ 。

性质 2^[8] 设 A 是指数有界 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元,则下面结论成立

- (1) A 为闭算子,且 $R(C) \subseteq \overline{D(A)}$;
- (2) $\forall x \in X, \int_0^t (t-s)C(s)x ds \in D(A)$, 且 $A \int_0^t (t-s)C(s)x ds = C(t)x - Cx$;
- (3) $\forall x \in D(A), C(t)x \in D(A)$, 且 $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = C(t)Ax = AC(t)x$ 。

2 C 余弦函数的概率型逼近问题

引理 1^[2] 设 $S(\cdot)x$ 是可测的,且对所有 $x \in X$ 其赋值是独立的,若 $\|S(\cdot)\| \leq g(\cdot)$, 其中 $g(g \geq 0)$ 是一般意义下的可积函数,则 S 是广义 Pettis 可积的,且

$$\left\| \int_{\Omega} S d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} g d\mu$$

定义 2^[2] 设 U 是实值随机变量, $E(U) = \xi$,

收稿日期:2014-09-29

作者简介:李晓敏(1978-),女,江苏徐州人,助教,硕士,主要研究方向为算子半群。

称 $\Psi_U(t) = E(t^U)$, ($t \geq 0$), 为概率生成函数, 称 $\Psi_U^*(t) = E(e^{tU})$, ($t \in R$) 为矩生成函数.

引理 2^[9] (Hölder 不等式) 若 (Ω, F, P) 为概率空间, $r \in (0, \infty)$, 用 $L^r(\Omega, F, P)$ 表示一切使 $\int |f|^r dP < \infty$ 的 F 可测函数类. 设 $U \in L^p(\Omega, F, P)$, $V \in L^q(\Omega, F, P)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$, 则

$$E|UV| \leq (E|U|^p)^{1/p} \cdot (E|V|^q)^{1/q}$$

引理 3^[6] (泰勒展开式) 设 B 为 C 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元, 若 $x \in D(B^r), r \geq 1$, 则对 $\forall s, t \geq 0$, 有:

$$T(t)x - T(s)x = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(t-s)^k}{k!} T(s) B^k x + \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} T(u) B^r x du$$

定理 1 设 A 是 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元, $A = B^2$, 若 $x \in D(B^r), r \geq 1$, 则对 $\forall s, t \geq 0$, 有:

$$C(t)x - C(s)x = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(t-s)^k}{k!} \frac{h(s) + (-1)^k h(-s)}{2} B^k x + \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{h(u) - (-1)^{r-1} h(-u)}{2} B^r x du$$

证明:

$$\begin{aligned} C(t)x - C(s)x &= \frac{h(t) + h(-t)}{2} x - \frac{h(s) + h(-s)}{2} x = \\ &= \frac{h(t) - h(s)}{2} x + \frac{h(-t) - h(-s)}{2} x = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(t-s)^k}{k!} \frac{h(s)}{2} B^k x + \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{h(u)}{2} B^r x du + \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(s-t)^k}{k!} \frac{h(-s)}{2} B^k x - \int_s^t \frac{(u-t)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{h(-u)}{2} B^r x du = \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(t-s)^k}{k!} \frac{h(s) + (-1)^k h(-s)}{2} B^k x + \\ &= \int_s^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{h(u) - (-1)^{r-1} h(-u)}{2} B^r x du \end{aligned}$$

定理 2 设 A 是 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元, $A = B^2$, U 是非负实值随机变量, $E(U) = t, \sigma^2(U) = \sigma^2$, 存在 $\delta > 0$, 使 $\Psi_U^*(\delta) = E(e^{\delta U}) < \infty$, 则对 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 (p > 1)$, 当 $\delta \geq p\omega \geq 0$ 时, 有

$$\|E[C(U)]x - C[E(U)]x\| \leq$$

$$\frac{M}{2} \|Ax\| \left\{ \sigma^2 e^{\omega t} + [\Psi_U^*(p\omega)]^{\frac{1}{p}} [E(|U-t|^{2q})]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (1)$$

其中 $x \in D(A)$

$$\|E[C(U)]x - C[E(U)]x\| \leq$$

$$\frac{M}{24} \|A^2 x\| \left\{ \sigma^4 e^{\omega t} + [\Psi_U^*(p\omega)]^{\frac{1}{p}} [E(|U-t|^4)]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (2)$$

其中 $x \in D(A^2)$

证明: 当 $x \in D(A)$ 时, 由 Taylor 展开式和 Hölder 不等式, 得

$$\|E[C(U)]x - C[E(U)]x\| =$$

$$\|E[C(U)]x - C(t)x\| =$$

$$\|E[(U-t) \frac{h(t) - h(-t)}{2} Bx +$$

$$\int_t^U (U-u) \frac{h(u) + h(-u)}{2} B^2 x du]\| =$$

$$\|E \int_t^U (U-u) h(u) A x du\| \leq$$

$$\frac{M}{2!} \|Ax\| E(e^{\omega t} |U-t|^2 + e^{\omega U} |U-t|^2) =$$

$$\frac{M}{2!} \|Ax\| [e^{\omega t} E(|U-t|^2) + E(e^{\omega U} |U-t|^2)] \leq$$

$$\frac{M}{2} \|Ax\| \left\{ \sigma^2 e^{\omega t} + [\Psi_U^*(p\omega)]^{\frac{1}{p}} [E(|U-t|^{2q})]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

(1) 式得证.

当 $x \in D(A^2)$ 时, 由于

$$C(U)x - C(t)x =$$

$$(U-t) \frac{h(t) - h(-t)}{2} Bx +$$

$$\frac{(U-t)^2}{2!} \frac{h(t) - h(-t)}{2} B^2 x +$$

$$\frac{(U-t)^3}{3!} \frac{h(t) - h(-t)}{2} B^3 x +$$

$$\int_t^U \frac{(U-t)^3}{3!} \frac{h(u) + h(-u)}{2} B^4 x du$$

所以

$$\|E[C(U)]x - C[E(U)]x\| =$$

$$\|E[C(U)]x - C(t)x\| =$$

$$\|E[\frac{(U-t)^3}{6} \frac{h(t) - h(-t)}{2} B^3 x +$$

$$\int_t^U \frac{(U-u)^3}{6} \frac{h(u) + h(-u)}{2} B^4 x du]\| =$$

$$\|E \int_t^U \frac{(U-u)^3}{6} h(u) A^2 x du\| \leq$$

$$\frac{M}{4!} \|A^2 x\| E(e^{\omega t} |U-t|^4 + e^{\omega U} |U-t|^4) =$$

$$\frac{M}{4!} \|A^2 x\| \left[e^{\omega t} E(|U-t|^4) + E(e^{\omega U} |U-t|^4) \right] \leq$$

$$\frac{M}{24} \|A^2 x\| \left\{ \sigma^4 e^{\omega t} + [\Psi_U^*(p\omega)]^{\frac{1}{p}} [E(|U-t|^4)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

(2) 式得证。

类似的,我们可以得到以下推论:

推论 1 设 A 是 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元, $A=B^2$, U 是非负实值随机变量, $E(U)=t$, $\sigma^2(U)=\sigma^2$, 存在 $\delta>0$, 使 $\Psi_U^*(\delta)=E(e^{\delta U})<\infty$, 则, 对 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. ($p>1$), 当 $\delta \geq p\omega \geq 0$ 时, 对 $x \in D(A')$ 有

$$\|E[C(U)]x - C[E(U)]x\| \leq$$

$$\frac{M}{(2\tau)!} \|A'x\| \left\{ \sigma^2 e^{\omega t} + [\Psi_U^*(p\omega)]^{\frac{1}{p}} [E(|U-t|^{2q})]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

下面从生成元的角度给出一般形式的 C 余弦函数 $C(t)$ 概率逼近式及指数公式

定理 3 设 A 是 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元, $A=B^2$, 记 $B_t = \frac{h(t)-I}{t}$, 则有

$$\|C(\xi)f - e^{\xi\sqrt{A}\cdot\frac{1}{\tau}}f\| \leq$$

$$\frac{M}{2} e^{\omega\xi} \|Af\| \left[\frac{\xi}{\tau} + 2 \frac{\xi}{\tau} \exp\left(\frac{\omega^2\xi}{\tau} e^{2\omega/\tau}\right) \right] \quad (3)$$

其中 $f \in D(A)$, $\tau > \frac{1}{\xi}$

$$\|C(\xi)f - e^{\xi\sqrt{A}\cdot\frac{1}{\tau}}f\| \leq$$

$$\frac{M}{24} e^{\omega\xi} \|A^2f\| \left[\frac{\xi^2}{\tau^2} + 2\sqrt{\frac{\xi^3}{\tau^3}} \exp\left(\frac{2\omega^2\xi}{\tau} e^{4\omega/\tau}\right) \right] \quad (4)$$

其中 $f \in D(A^2)$, $\tau > \frac{1}{\xi}$

证明 先证明(3)式, 设 $\{N(\tau) | \tau > 0\}$ 为 Poisson 过程, 且 $E[N(\tau)] = \tau\xi$, 取 $X(\tau) = \frac{1}{\tau}N(\tau)$, 则有

$$E[X(\tau)] = E\left[\frac{1}{\tau}N(\tau)\right] = \xi,$$

$$\sigma^2[X(\tau)] = \sigma^2\left[\frac{1}{\tau}N(\tau)\right] = \frac{\xi}{\tau},$$

$$\Psi_{X(\tau)}^* = \exp[\tau\xi(e^{1/\tau} - 1)],$$

$$E[(X(\tau) - \xi)^4] = 3\frac{\xi^2}{\tau^2} + \frac{\xi}{\tau^3} \leq 4\frac{\xi^2}{\tau^2}, (\tau > \frac{1}{\xi}),$$

$$E\{C[X(\tau)]\} = E\{C[\frac{1}{\tau}N(\tau)]\} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C\left(\frac{k}{\tau}\right) P[N(\tau) = k] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h\left(\frac{k}{\tau}\right) + h\left(-\frac{k}{\tau}\right)}{2} P[N(\tau) = k] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \left[h\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^k \frac{(\tau\xi)^k}{k!} e^{-\tau\xi} + \left[h\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right]^k \frac{(-\tau\xi)^k}{k!} e^{-\tau\xi} \right\} =$$

$$e^{\xi B \cdot \frac{1}{\tau}} = e^{\xi\sqrt{A}\cdot\frac{1}{\tau}}$$

在(1)式中令 $p=2$ 得

$$\|C(X)f - e^{\xi\sqrt{A}\cdot\frac{1}{\tau}}f\| = \|E[C(X)]f - C(\xi)f\| \leq$$

$$M \|Af\| \left\{ \frac{\xi}{\tau} e^{\omega\xi} + [E(|X-\xi|^4)]^{1/2} [\Psi_X^*(2\omega)]^{1/2} \right\} \leq$$

$$M \|Af\| \left\{ \frac{\xi}{\tau} e^{\omega\xi} + \frac{2\xi}{\tau} \exp\left[\frac{1}{2}\tau\xi(e^{2\omega/\tau} - 1)\right] \right\} =$$

$$M \|Af\| e^{\omega\xi} \left\{ \frac{\xi}{\tau} + \frac{2\xi}{\tau} \exp\left[\frac{1}{2}\tau\xi(e^{2\omega/\tau} - 1) - \omega\xi\right] \right\} \leq$$

$$Me^{\omega\xi} \|Af\| \left[\frac{\xi}{\tau} + 2 \frac{\xi}{\tau} \exp\left(\frac{\omega^2\xi}{\tau} e^{2\omega/\tau}\right) \right],$$

($f \in D(A)$, $\tau > \frac{1}{\xi}$)

(4) 式的证明同(3)式。

从而得出 C 余弦函数概率逼近指数公式。

推论 2 设 A 是 C 余弦函数 $C(t)$ 的无穷小生成元, $A=B^2$, 记 $B_t = \frac{h(t)-I}{t}$, 则有

$$C(\xi)f = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\xi\sqrt{A}\cdot\frac{1}{\tau}}f$$

参考文献:

- [1] Pfeifer D. On a probabilistic representation for semigroups of operator[J]. Math. Esposition, 1984(1): 93-98.
- [2] Pfeifer D. Approximation theoretic aspect of probabilistic representation for operator semigroups[J]. Journal of Approximation theory, 1985, 43(3): 271-296.
- [3] Pfeifer D. Probabilistic concepts of Approximation theory in connection with operator semigroups[J]. Journal of Approximation theory, 1985, 1(4): 93-118.

(下转第 69 页)

- [4] 刘成志,张步才. 基于既有道路改建路线测设和曲线拟合方法的探讨[J]. 西南公路,2006(4):24-25.
 [5] 李乃成. 数值分析[M]. 北京:科学出版社,2011.

Analysis on Irregular Road Alignment Parameter Value

MIAO Hongbing, YANG Yaozong

(School of Civil Engineering & Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Combined with the existing road reconstruction operation status of irregular and old road the trend, the problems of the old road reconstruction of mathematics are presented. According to fitting approximation principle, a mathematical model of the old road is set up. Through continuous optimization of the mathematical model, a linear function of target is obtained, and numerical calculation software MATLAB program, for example by trial model, obtains the linear parameter ideal. The results show that the fitting parameters route mathematic problem obtained is reasonable and reliable and can be used as a design reference.

Keywords: road reconstruction; plane geometry; mathematical model; curve fitting; optimization

(责任编辑:张英健)

(上接第20页)

- [4] Pfeifer D. Butzer P L. A Probabilistic to representation formulate or semigroups of operator with rates of convergence[J]. Applicable Analysis, 1986, 23: 111-118.
 [5] Chen W Z, Zhou M. Asymptotic formula for probabilistic representations of (C_0) operator semigroups[J]. Northeast Math, 1994, 10(2): 159-166.
 [6] 陈文忠. C 半群概率表示的饱和定理[J]. 厦门大学学报:自然科学版, 1995, 34(1): 1-6.
 [7] Tanaka N. On the exponentially bounded C -cosine family[J]. Gokujutsu Kenkyu (Academic Studies), Math, 1988, 37: 37-44.
 [8] 郑权, 雷岩松. 指数有界的 C 余弦算子函数[J]. 系统科学与数学, 1996, 16(3): 242-252.
 [9] 严士健, 刘秀芳. 测度与概率[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2003: 308-309.

Probabilistic Approximations of C Cosine Functions

LI Xiaomin

(Department of Basic Education, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: Probabilistic approximations and general conclusion are given for C cosine function by means of operator-valued mathematical expect and probabilistic methods, using the Taylor expansion given by the association of C cosine function and C semigroups' inequality and moment-generating function. Finally, using these given conclusion, the exponential formula of probabilistic approximations for C cosine function is produced by virtue of generator.

Keywords: C cosine function; Taylor expansion; moment-generating function; probabilistic approximations

(责任编辑:张英健)

C余弦函数的概率型逼近问题

作者:

作者单位:

刊名:

英文刊名:

年, 卷(期):

[李晓敏, LI Xiaomin](#)

[盐城工学院基础教学部, 江苏盐城, 224051](#)

[盐城工学院学报\(自然科学版\)](#)

[Journal of Yancheng Institute of Technology\(Natural Science Edition\)](#)

[2014, 27\(4\)](#)

引用本文格式: [李晓敏, LI Xiaomin](#) [C余弦函数的概率型逼近问题](#)[期刊论文]-[盐城工学院学报\(自然科学版\)](#) 2014(4)