

doi:10.16018/j.cnki.cn32-1650/n.201503004

旋转矩形静矩与惯性矩关系系数研究

焦锡华¹, 陆文林², 庄 甜¹, 俞晓明²

(1. 盐城工学院 机械优集学院, 江苏 盐城 224051; 2. 盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:液体的稳定度取决于一个无量纲系数, 定义为静矩与惯性矩关系系数, 从理论上研究该系数所具有的性质对解决液体体系的平衡问题具有重要意义。分析了矩形绕端点在其所在平面内旋转时, 静矩与惯性矩关系系数 p'_y 和 p'_x 的性质。

关键词:静矩; 惯性矩; 关系系数; 旋转矩形; 正方形

中图分类号:0312.3 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2015)03-0017-04

构件的静矩与惯性矩取决于构件本身并决定了构件的性能, 一般构件的静矩与惯性矩之间并没有简单的关系。研究液体的稳定度时, 发现液体的稳定度取决于一个无量纲系数, 这就是静矩与惯性矩关系系数^[1], 该系数可将立体问题转化为平面问题。在材料力学中, 研究的杆件其横截面大多是各种形式的平面图形(如矩形、圆形、T形、工字形等), 研究这些图形的几何性质时, 恰恰都可以不考虑研究对象的物理和力学因素, 而作为纯几何问题加以处理^[2]。从理论上研究静矩与惯性矩关系系数对解决体系的平衡问题具有重要作用。本文研究的矩形绕其端点在其所在平面内旋转时静矩与惯性矩关系系数及其所具有的性质, 对深刻理解和丰富发展静矩与惯性矩关系系数具有重要意义。

1 静矩与惯性矩关系系数的定义

如图 1 所示, 平面图形 K 处于 xoy 平面内, 在图形 K 上 (x, y) 处取面积微元 dA , 则平面图形 K 绕 y 轴的静矩 S_y 、惯性矩 J_y 以及绕 x 轴的静矩 S_x 、惯性矩 J_x 分别为

$$S_y = \int x dA \tag{1}$$

$$J_y = \int x^2 dA \tag{2}$$

$$S_x = \int y dA \tag{3}$$

$$J_x = \int y^2 dA \tag{4}$$

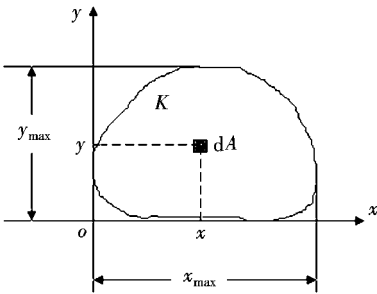


图 1 静矩与惯性矩关系系数的定义
Fig. 1 Definition of the relational coefficient between static moment and moment of inertia

定义平面图形 K 绕 y 轴、 x 轴的静矩与惯性矩关系系数分别为

$$p_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} \tag{5}$$

$$p_x = \frac{S_x y_{\max} - J_x}{J_x} \tag{6}$$

式(5)中的 $x_{\max}$ 和式(6)中的 $y_{\max}$ 分别为平面图形 K 在 x 轴和 y 轴方向上的最大长度。

2 旋转矩形静矩与惯性矩关系系数

2.1 理论推导

如图 2a, 设边长分别为 a, b 的矩形 $ABCD$ 处于坐标系 xoy 。将矩形及坐标系 xoy 绕原点 O 沿顺时针方向旋转 θ (逆时针取正, 顺时针取负), 得矩形 $A'B'C'D'$, 如图 2b 所示。

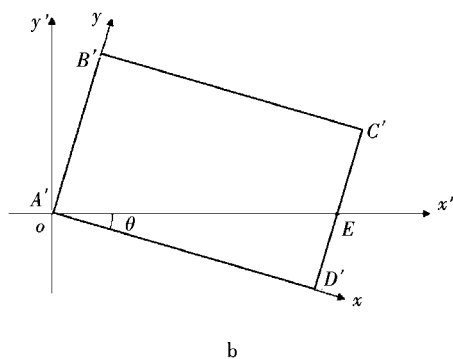
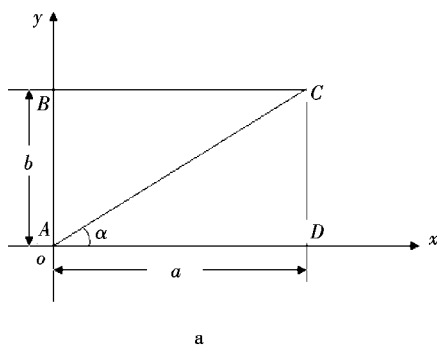


图 2 矩形旋转

Fig. 2 Rotation of a rectangle

如图 2a, 矩形 $ABCD$ 的对角线长 $L = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。矩形质心横坐标分别为 $x_c = \frac{L}{2} \cos \alpha$ 、

$y_c = \frac{L}{2} \sin \alpha$; 矩形 $ABCD$ 对轴 x, y 的静矩、惯性矩

分别为 $S_x = \frac{abL}{2} \sin \alpha = \frac{ab^2}{2}$ 、 $S_y = \frac{abL}{2} \cos \alpha = \frac{a^2b}{2}$ 、

$J_x = \frac{ab^3}{3}$ 、 $J_y = \frac{a^3b}{3}$; 矩形 $ABCD$ 对通过点 O 的一对坐标轴 x, y 的惯性积为

$$J_{xy} = \int_A xy dx dy = \int_0^a \int_0^b xy dx dy = \frac{a^2b^2}{4}。$$

如图 2b, 矩形 $A'B'C'D'$ 的质心横坐标分别为

$$x'_c = \frac{L}{2} \cos(\alpha - \theta) \quad (7a)$$

$$y'_c = \frac{L}{2} \sin(\alpha - \theta) \quad (7b)$$

矩形 $A'B'C'D'$ 的绕轴 x, y 的静矩分别为

$$S'_x = \frac{abL}{2} \sin(\alpha - \theta) \quad (8a)$$

$$S'_y = \frac{abL}{2} \cos(\alpha - \theta) \quad (8b)$$

根据惯性矩的转轴公式^[3]得

$$J'_x = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\theta - J_{xy} \sin 2\theta = \frac{ab(a^2 + b^2)}{6} + \frac{ab(b^2 - a^2)}{6} \cos 2\theta - \frac{a^2b^2}{4} \sin 2\theta \quad (9a)$$

$$J'_y = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\theta + J_{xy} \sin 2\theta = \frac{ab(a^2 + b^2)}{6} - \frac{ab(b^2 - a^2)}{6} \cos 2\theta + \frac{a^2b^2}{4} \sin 2\theta \quad (9b)$$

将式(8a)、(9a)及 $x'_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \theta)$ 代入式(5)得

$$p'_y = \frac{S'_y x'_{\max} - J'_y}{J'_y} = \frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + 3ab \sin \theta \cos \theta}{2a^2 \cos^2 \theta + 2b^2 \sin^2 \theta + 3ab \sin \theta \cos \theta} \quad (10a)$$

将式(8b)、(9b)及 $y'_{\max} = b \cos \theta - a \sin \theta$ 代入式(6)得

$$p'_x = \frac{S'_x y'_{\max} - J'_x}{J'_x} = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - 3ab \sin \theta \cos \theta}{2a^2 \sin^2 \theta + 2b^2 \cos^2 \theta - 3ab \sin \theta \cos \theta} \quad (10b)$$

定义长方形的长宽比 $k = \frac{a}{b}$, 则式(10a)、(10b)可变为

$$p'_y = \frac{k^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 3k \sin \theta \cos \theta}{2k^2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 3k \sin \theta \cos \theta} \quad (11a)$$

$$p'_x = \frac{k^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 3k \sin \theta \cos \theta}{2k^2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - 3k \sin \theta \cos \theta} \quad (11b)$$

式(8a)、(8b)、(9a)、(9b)、(11a)、(11b)表明: 尽管矩形绕其顶点在其所在平面内旋转时, 其静矩、惯性矩都在变化, 但给定矩形的长宽比 k 以及旋转角 θ , 静矩与惯性矩关系系数 p'_y, p'_x 仍具有标度变换不变性。

2.2 作图分析

根据式(11a)、(11b), 取 $\theta \in [-\pi/2, 0]$, 利用 EXCEL 2007 作出 $k = 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4$ 时 $p'_y(k, \theta), p'_x(k, \theta)$ 图, 如图 3 所示。

图 3 表明: (1) 当旋转角 $\theta = 0$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 时, $p'_y = p'_x = \frac{1}{2}$, 与文献[1]结论一致; (2) 当旋转角 θ 从 0 变化到 $-\frac{\pi}{2}$ 的过程中, p'_y 均从 0.5 开始, 先减小至最小值 -1, 再增大至最大值 0.5; p'_x 均从 0.5 开始, 先增大至最大值 0.714, 再减小至最小值 0.5。

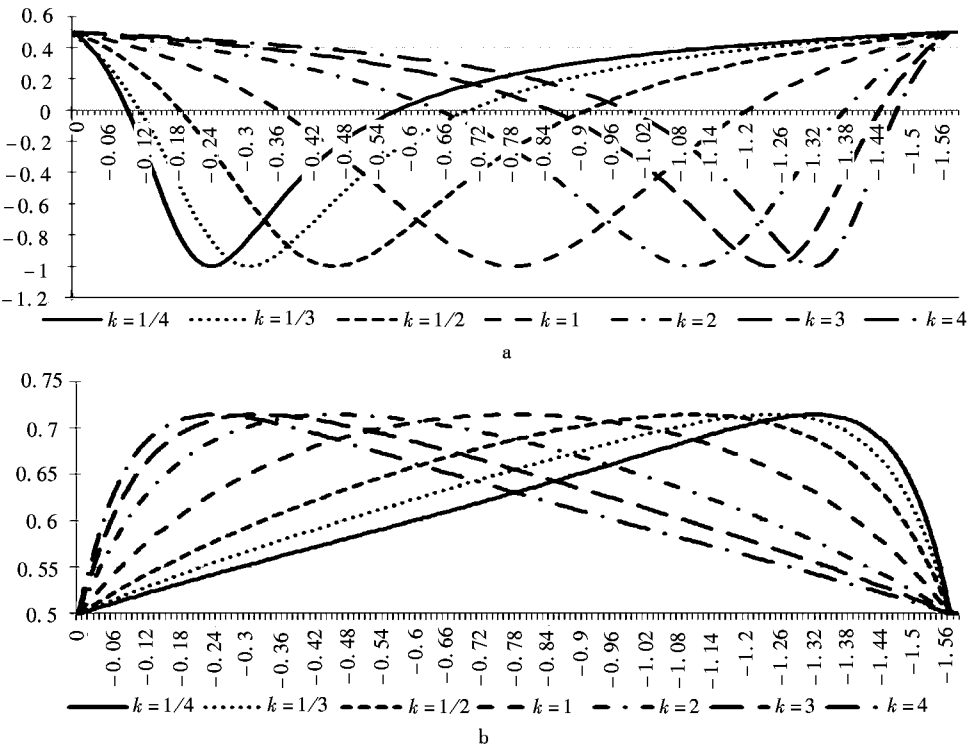


图3 $k=1/4,1/3,1/2,1,2,3,4$ 时,旋转矩形静矩与惯性矩关系系数 $p'_y(k,\theta)$ 、 $p'_x(k,\theta)$ 的定义
Fig.3 Relational coefficient of a rotational rectangle $p'_y(k,\theta)$ 、 $p'_x(k,\theta)$ when $k=1/4,1/3,1/2,1,2,3,4$

2.3 公式讨论

2.3.1 p'_y 、 p'_x 的极值

对式(11a)进行计算,令 $\frac{dp'_y}{d\theta}=0$,只考虑 θ 处于第4象限,解得

$$\tan \theta = -k \tag{12a}$$

对式(11b),令 $\frac{dp'_x}{d\theta}=0$,只考虑 θ 处于第4象限,解得

$$\tan \theta = -\frac{1}{k} \tag{12b}$$

2.3.2 p'_y 、 p'_x 的性质

将长方形的长宽比 k 换成 $\frac{1}{k}$ 、将旋转角 θ 换成 $\frac{\pi}{2}-\theta$,代入式(11a)、(11b)有

$$p'_y(k,\theta) = p'_y\left(\frac{1}{k},\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{13a}$$

$$p'_x(k,\theta) = p'_x\left(\frac{1}{k},\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tag{13b}$$

2.3.3 p'_y 、 p'_x 间的关系

将旋转角 θ ($\theta \in [-\pi/2,0]$) 换成 $\frac{\pi}{2}+\theta$,代入式(11a)、(11b)有

$$p'_y(k,\theta) = p'_x\left(k,\frac{\pi}{2}+\theta\right) \tag{14}$$

3 旋转正方形静矩与惯性矩关系系数

令 $k=\frac{a}{b}=1$,则此时长方形变为正方形。由式(11a)、(11b)得

$$p'_y = \frac{2+3\sin 2\theta}{4+3\sin 2\theta} \tag{15a}$$

$$p'_x = \frac{2-3\sin 2\theta}{4-3\sin 2\theta} \tag{15b}$$

根据式(15a)、(15b),取 $\theta \in [-\pi/2,0]$,利用EXCEL 2007 作出 $p'_y(\theta)$ 、 $p'_x(\theta)$ 图,如图4所示。

从图4可看出:

- (1)当旋转角 θ 从0变化到 $-\frac{\pi}{2}$ 的过程中, p'_y 从0.5开始先减小后增大,当 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 时, p'_y 达最小值-1;而 p'_x 则从0.5开始先增大后减小,当 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 时, p'_x 达最大值0.714。
- (2)当旋转角 θ 关于 $-\frac{\pi}{4}$ 对称时, p'_y 、 p'_x 均相同。
- (3)图4是图3(a)、(b)中, $k=1$ 时的两种特殊情形。

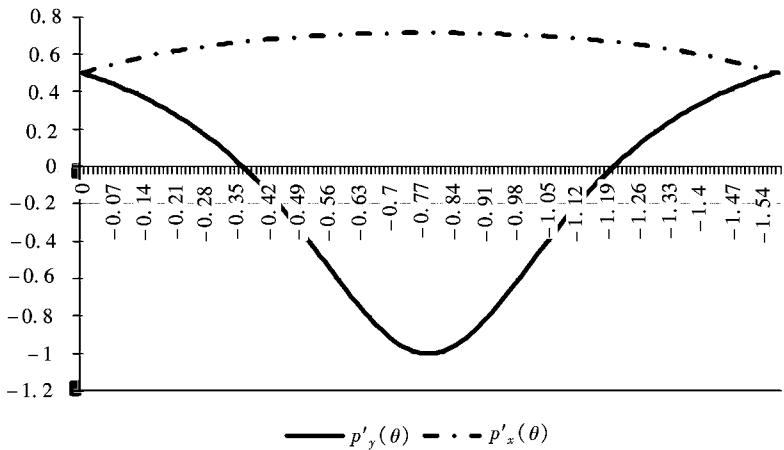


图 4 旋转正方形静矩与惯性矩关系系数 $p_y(\theta)$ 、 $p_x(\theta)$ 图

Fig.4 Relational coefficient of a rotational square $p'_y(\theta)$ 、 $p'_x(\theta)$

4 结束语

基于静矩与惯性矩关系系数 p_y 、 p_x 的定义, 本文研究了旋转矩形绕其端点在其所在平面内旋转时的 p'_y 、 p'_x 及其有关性质。研究表明:(1) 定义了长方形的长宽比 k 后, p'_y 、 p'_x 只取决于 k 和旋转角 θ , 具有标度变换不变性;(2) 当旋转矩形的旋转角 $\theta=0$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 时, $p'_y=p'_x=\frac{1}{2}$; 当旋转角 θ 从 0 变化到 $-\frac{\pi}{2}$ 的过程中, p'_y 先减小后增大, p'_x

则先增大后减小; 当 p'_y 减小到最小值 -1 时, p'_x 则增大到最大值 0.714 , 此时 θ 满足 $\tan \theta = -\frac{1}{k}$;
(3) 将长方形的长宽比 k 换成 $\frac{1}{k}$ 、旋转角 θ 换成 $\frac{\pi}{2} - \theta$, 则 p'_y 、 p'_x 均保持不变; 将旋转角 θ 换成 $\frac{\pi}{2} + \theta$, 则 $p'_y=p'_x$ 。(4) 对于正方形 ($k=1$), 当旋转角 θ 关于 $-\frac{\pi}{4}$ 对称时, p'_y 、 p'_x 均相同。

参考文献:

[1] 俞晓明. 平面对称图形静矩与惯性矩的关系研究[J]. 盐城工学院学报:自然科学版, 2013, 26(1): 5-9.
[2] 周金枝, 姜久红. 材料力学[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2013: 228.
[3] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学(I) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 330.

Research on the Relational Coefficient of Static Moment and Moment of Inertia of a Rotating Rectangular

JIAO Xihua¹, LU Wenlin², ZHUANG Tian¹, YU Xiaoming²

(1. School of Mechanical Optimal Sets Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China,)
(2. Department of Basic Courses, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: The stability of liquid system is determined by a non-dimensional coefficient which is called relational coefficient between static moment and moment of inertia. Research on the properties of the relational coefficient in theory for the balance of the liquid system is of great importance. When the end of the rectangle is rotated in the plane, analysing the nature of the relational coefficient p'_y 、 p'_x .

Keywords: static moment; moment of inertia; relational coefficient of static moment and moment of inertia; rotating rectangular; square

(责任编辑: 张英健)