

# 基于梯度优化法的基坑整体稳定可靠度及模糊可靠度分析

朱海陶<sup>1,2</sup>, 廖 瑛<sup>1</sup>, 黄 斌<sup>1,3</sup>, 郭宇飞<sup>1</sup>, 黄 波<sup>1</sup>

(1. 苏州科技学院 土木工程学院, 江苏 苏州 215011;  
2. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092;  
3. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 作为一类重要的基坑支护结构, 重力式挡土墙整体稳定性研究一直备受众多学者极大的关注。从可靠度的几何意义出发, 通过 MATLAB 编写程序, 对最危险滑弧面所对应圆心进行全域搜索, 并利用梯度优化法计算整体稳定可靠度, 提高了整体稳定可靠度的计算精度。同时, 计算了其模糊可靠度, 对比计算结果可知, 模糊可靠度理论能更加科学、全面、客观地反映复杂的岩土工程可靠度问题的实质。

**关键词:** 梯度优化法; MATLAB; 全域搜索; 稳定可靠度; 模糊可靠度

**中图分类号:** TU476; O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2015)03-0075-04

重力式挡土墙的整体失稳<sup>[1]</sup> 是其主要的失稳形式之一, 其整体稳定性分析具有保证基坑稳定的重要意义。目前, 该领域的研究方法展现出以可靠度理论为基础的极限状态设计法的趋势。但是, 基于结构可靠度理论的基坑支护结构稳定性问题的研究, 其对应的某种失稳形式的功能函数往往是高度非线性函数, 根据验算点法等计算可靠度需要将功能函数在验算点处线性化, 这不仅会降低计算精度还可能导致收敛速度减缓乃至不收敛, 故而由可靠指标的几何意义出发, 采用优化算法解决这一问题行之有效。此外, 由于岩土工程问题的复杂性, 基坑整体稳定性问题除了具有随机性特点以外, 往往还具有模糊性特点, 故而采用模糊可靠度理论同时考虑问题的随机性和模糊性特点更为科学全面<sup>[2]</sup>。

针对基坑的整体稳定性研究, 常用方法有瑞典圆弧法、简单条分法等。本文以简单条分法为例, 利用梯度优化法和 MATLAB 编写相应分析程序, 并利用模糊可靠度理论对某重力式挡土墙进行整体稳定性分析。

## 1 基坑整体稳定可靠度分析

### 1.1 整体稳定性功能函数的建立

基坑整体稳定性计算方法, 采用圆弧滑动面

简单条分法, 按总应力法取单位墙宽, 可得整体稳定安全系数为<sup>[3]</sup>:

$$K = \frac{\sum \{c_j l_j + (q_j b_j + \Delta G_j) \cos \theta_j \tan \varphi_j\}}{\sum (q_j b_j + \Delta G_j) \sin \theta_j} \quad (1)$$

式中,  $c_j$ 、 $\varphi_j$  分别为第  $j$  土条滑弧面处土的粘聚力和内摩擦角;  $b_j$ 、 $l_j$  分别为第  $j$  土条的宽度和底面面积;  $q_j$  为作用在第  $j$  土条上附加均布载荷标准值;  $\Delta G_j$  为第  $j$  土条的自重, 按天然重度计算;  $\theta_j$  为第  $j$  土条对应滑弧中点处法线与竖直线所成夹角。

则按照可靠度理论, 当假设地下水位位于墙体以下时, 可设整体稳定性的功能函数为:

$$Z = g(c, \varphi) = \sum \{c_j l_j + (q_j b_j + \Delta G_j) \cos \theta_j \tan \varphi_j - (q_j b_j + \Delta G_j) \sin \theta_j\} \quad (2)$$

### 1.2 最危险滑弧面及圆心的确定

根据大量工程经验和研究已知, 若以桩顶中心为原点建立笛卡尔坐标系并将其划分为 A、B、C、D 4 个区域, 则最危险的滑弧通过桩最底端  $c$  点且其对应圆的圆心在如图 1 所示的 D 区域<sup>[4]</sup>。故可对该区域利用 MATLAB 编程进行全域搜索, 寻找最危险的滑弧面和圆心。

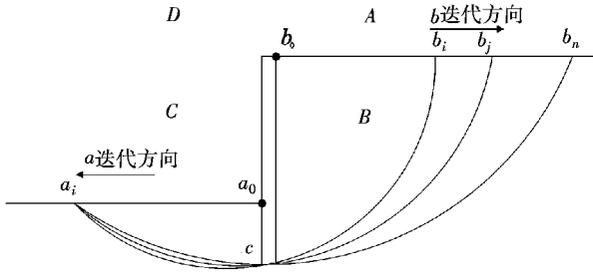


图 1 全域搜索示意图

Fig.1 Sketch map of global search

假定桩最底端为  $c$  点,滑弧左端  $a$  的初始搜索点为  $a_0$ ,滑弧右端  $b$  的初始搜索点为  $b_0$ ,则搜索步骤为:

①假定初始时  $a$ 、 $b$  点均在桩的边界  $a_0$ 、 $b_0$  处,且  $a$ 、 $b$  的迭代步长为  $0.5\text{ m}$ ;

②假设滑弧端  $a$ 、 $b$  各自搜索的总长度按工程研究经验<sup>[5]</sup>取约为  $4.5$  倍的基坑深度; $a$  每迭代一次, $b$  就相应地从  $0 \sim 4.5 H$  的范围内迭代搜索,即若  $a$  向左迭代  $m$  次, $b$  向右迭代  $n$  次,则共迭代  $m \times n$  次。滑弧  $b$  端每迭代一次就判断圆心位置,并对圆心位置在  $D$  区域的滑弧利用简单条分法和梯度优化法求解相对应的可靠度;

③对  $D$  区域圆心对应的可靠度集进行比较,求最小可靠度。则此最小可靠度值所对应的圆弧即为最危险圆弧,并求出相应失效概率即可。

按上述①、②步骤利用 MATLAB 求解可靠度集的流程如图 2 所示。

### 1.3 梯度优化法

为简便起见,设基本变量  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  为相互独立的正态变量,同时,引入标准化正态随机变量  $Y$ ,使得  $Y_i = (X_i - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。通过变换,可得到一组相互独立的标准正态变量  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 。

于是功能函数即(2)式也可转化到标准正态空间,即

$$g(X) = g(c, \varphi) = g\left(\frac{c - \mu_c}{\sigma_c}, \frac{\varphi - \mu_\varphi}{\sigma_\varphi}\right) = G(Y) \quad (3)$$

由于结构可靠指标  $\beta$  的几何含义为:在标准正态坐标系中,从原点到极限状态面  $Z = 0$  的最短距离,进而  $\beta$  的计算可转化为求此最短距离<sup>[6]</sup>。采用迭代的方法可以确定极限状态面  $G(Y) = 0$  上距原点最近的点  $Y^* = (Y_1^*, Y_2^*)$ ,可靠

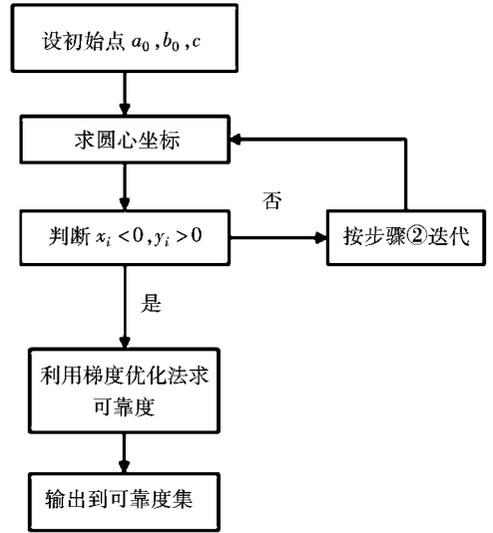


图 2 MATLAB 搜索流程图

Fig.2 Flow chart of MATLAB search

度指标的求解模型化简为

$$\begin{cases} \beta = \min \sqrt{(Y^*)^T Y^*}, & \text{目标函数} \\ G(Y^*) = 0. & \text{约束条件} \end{cases} \quad (4)$$

利用梯度优化法求解(4)式这一优化问题可得验算点  $Y^*$ ,其中所用的迭代格式如下:

$$Y_{i+1} = \left( Y_i^T \alpha_i + \frac{G(Y_i)}{\|\nabla G(Y_i)\|} \right) \alpha_i \quad (5)$$

式中, $Y_i$  表示第  $i$  次迭代计算所求得的验算点; $G(Y_i)$  的梯度向量为

$$\nabla G(Y_i) = \left( \frac{\partial G(Y)}{\partial Y_1}, \frac{\partial G(Y)}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial G(Y)}{\partial Y_n} \right),$$

$$\alpha_i = - \frac{G(Y_i)}{\|\nabla G(Y_i)\|}$$

其所对应的功能函数沿负梯度方向的单位向量<sup>[7]</sup>。经过几轮循环的迭代计算, $Y_i$  便收敛于极限状态面上距离原点最近的点  $Y^*$ ,从而达到所需的计算精度。

## 2 基坑整体稳定模糊可靠度分析

传统挡土墙整体稳定性分析是以安全系数来衡量其稳定程度,但此方法忽略了挡土墙稳定性分析中的随机不确定性和模糊不确定性。因此,在可靠度理论分析中同时考虑问题的随机性和模糊性特点则更为科学、全面。

根据模糊数学理论,设  $Z$  是描述模糊事件状态的随机变量,其概率密度函数为  $f_Z(z)$ ,  $\mu_A(z)$  是描述模糊事件状态程度的隶属函数,则基坑失稳的模糊失效概率为

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(z) f_z(z) dz \quad (6)$$

相应的模糊可靠度为

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (7)$$

令基坑整体稳定性分析的功能函数为  $Z = R - S$ , 其中  $R$  为结构抗力,  $S$  为荷载效应。同时假定  $c, \varphi$  为相互独立的随机变量、结构抗力  $R$  和荷载效应  $S$  均服从正态分布, 则有功能函数  $Z$  亦服从正态分布, 且概率密度函数为

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left(-\frac{(Z - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (8)$$

其中,  $\mu_z$  和  $\sigma_z$  分别为  $Z$  的均值和标准差, 可分别按下述公式计算<sup>[8]</sup>:

$$\mu_z = \mu_R - \mu_S \quad (9a)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_\varphi^2} \quad (9b)$$

对于隶属函数可选取如式(10)所示的降岭形分布

$$\mu_A(z) = \begin{cases} 1 & Z \leq a \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} \left( Z - \frac{a+b}{2} \right) & a < Z < b \\ 0 & Z \geq b \end{cases} \quad (10)$$

对其模糊过渡区上下限的确定可根据模糊类型, 结合工程经验和文献[9]选定为  $a = 0.8$ ,  $b = 1.1$ 。

则, 将式(8)和式(10)代入式(6)、(7)即可求出整体稳定性的模糊失效概率和模糊可靠度。

### 3 实例分析

根据文献[10]中的实际工程, 某大酒店的基坑开挖深度  $H = 5.78$  m, 地面均布垂直荷载为  $q = 10$  kPa, 采用直径为  $\phi = 0.8$  m 的钻孔灌注桩, 桩长 14 m。为简化起见, 桩身所在土层的土性参数粘聚力  $c$ 、摩擦角  $\varphi$  和土层重度  $\gamma$  可按土层厚度进行加权, 统计结果如表 1 所示。

表 1 土体参数及概率特征

Table 1 Soil parameters and probability characteristics

	$c/\text{kPa}$	$\varphi/\text{rad}$	$\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$
平均值	12.280	0.178	17.43
标准差	4.298	0.045	—
变异系数	0.350	0.250	—

将实例数据代入 MATLAB 程序, 以及利用 Mathematica 计算所得的失效概率及各自相应的可

靠度如表 2 所示。其中, 根据 MATLAB 搜索最危险的滑弧所对应的圆心坐标为  $(-8.16, 177.21)$ , 且根据对最危险滑弧面所对应可靠度的迭代计算如表 3 所示:

表 2 各计算模型所求失效概率及可靠度

Table 2 Failure probability and reliability of each computational model

	稳定可靠性	模糊可靠性
失效概率( $P_f$ )/%	0.758	0.816
可靠度( $\beta$ )	2.428 4	2.401 5

表 3 最危险滑弧面梯度优化法迭代次数及其稳定可靠度

Table 3 Gradient optimization iterations and stable reliability of the most dangerous sliding surface

迭代次数	稳定可靠度
1	2.441 372
2	2.439 061
⋮	⋮
17	2.428 404
18	2.428 402

由于基坑失稳所对应的概率标准目前尚无规定, 一般多以  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  为参考。对比分析表 2 可知, 利用模糊可靠度理论所求得的失效概率较之于利用梯度优化法所求得的失效概率偏大, 但两种方法所求得的基坑都是安全的, 这与工程实际是相符合的。并且, 由表 3 可知, 梯度优化法具有迭代次数少、计算量小的特点。

### 4 结论

(1) 通过 MATLAB 编程进行最危险滑弧面所对应圆心的全域搜索, 使挡土墙整体稳定性问题的研究程序化, 提高了挡土墙稳定可靠度计算的精度。从某种程度上, 推动了重力式挡土墙整体稳定性的研究。

(2) 在简单条分法的基础上, 从可靠度的几何意义出发, 利用梯度优化法求得相应可靠度, 避免了传统方法处理高次非线性问题的误差和发散问题。

(3) 对比模糊可靠度和稳定可靠度不难发现: 由于模糊可靠度理论既考虑了问题的随机性又考虑了模糊不确定性特点, 因此模糊可靠度理论能更科学、全面地反映复杂岩土工程问题的实质, 为岩土工程问题研究提供一种新的思路。

## 参考文献:

- [1] Babu G L S, Basha B M. Optimum Design of Cantilever Retaining Walls Using Target Reliability Approach[J]. International Journal of Geomechanics, 2008(8):240-252.
- [2] 廖瑛,王月香,华志明. 基坑支护方案的改进 AHP 与多级模糊综合评判[J]. 地下空间与工程学报,2011,7(4):706-710.
- [3] 赵明华. 土力学与基础工程[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2012.
- [4] 梁大伟,梁仁旺,白晓红. 基坑整体稳定性确定最危险滑动面的程序设计[J]. 山西建筑,2006,32(1):5-6.
- [5] 姜晨光. 土力学与地基基础[M]. 北京:北京化学工业出版社,2013.
- [6] 俞智涛,韩大建. 结构可靠度分析的优化算法[J]. 华南理工大学学报:自然科学版,2003,31(4):82-84.
- [7] 武清玺. 结构可靠性分析及随机有限元法[M]. 北京:机械工业出版社,2005.
- [8] 廖瑛,徐维双. 结构基坑土体稳定性的模糊概率分析方法研究[J]. 工业建筑,2010,40(6):85-88.
- [9] 何广讷,张彦鹏. 基坑支护稳定性的非确值分析[C]//全国第八届土力学大会论文集. 北京:中国建筑工业出版社,1995:503-507.
- [10] 宁波市城乡建设委员会. 软土地区深基坑支护工程实例[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1997.

## Stable Reliability and Fuzzy Reliability Analysis of Foundation Pit Based on Gradient Optimization Method

ZHU Haitao<sup>1,2</sup>, LIAO Ying<sup>1</sup>, HUANG Bin<sup>1,3</sup>, GUO Yufei<sup>1</sup>, HUANG Bo<sup>1</sup>

- (1. School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215011, China;  
2. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;  
3. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** As a kind of important foundation pit supporting structure, the gravity retaining wall has always drawn many scholars' attention. Aiming to start with the aspect of the geometric meaning of reliability, we can use the global searching method of the most dangerous sliding surface corresponding to the center of the circle through MATLAB programming, and use the gradient optimization method to calculate the overall stability reliability. Finally, the accuracy of the overall stability is improved. The results of comparison can be known that fuzzy reliability theory can be more scientific, comprehensive and objective to reflect the essence of complex geotechnical engineering reliability problem.

**Keywords:** gradient optimization method; MATLAB; global search; stable reliability; fuzzy reliability

(责任编辑:张英健)