

最小 Q -特征值第二小的给定悬挂点数的非二部单圈图

刘晓蓉^{1,2}, 张 荣²

(1. 青海师范大学 数学系, 青海 西宁 810008; 2. 盐城师范学院 数学与统计学院, 江苏 盐城 224002)

摘要:图的最小 Q -特征值常被用来衡量一个图的非二部程度, 受到研究者的广泛关注。在路 P_{n-k-2} 的一端接出一个圈 C_3 , 另一端接出 k 个悬挂边, 所得的 n 阶图记为 $U_n^k(3)$ 。范益政等人最近证明 $U_n^k(3)$ 是最小 Q -特征值达到最小的图。在他们的基础上, 证明 $C_3^1(n-k-1)$ 是最小 Q -特征值达到第二小的图, 其中 $C_3^1(n-k-1)$ 是将 $U_n^k(3)$ 的一条悬挂边移至与悬挂邻点相邻的非悬挂点上所得的图。

关键词:非二部单圈图; 悬挂点; 最小特征值

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2015)04-0011-04

令 $G = (V, E)$ 是一个简单无向图, 它的顶点集 $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集 $E = E(G)$ 。 $A(G)$ 为图 G 的邻接矩阵, $D(G) = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)\}$ 为 G 的度对角矩阵, 这里 $d(v_i)$ 是顶点 v_i 的度, 称矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$ 为 G 的拟(无符号)拉普拉斯矩阵(又称 Q -矩阵)。因为 $D(G)$ 是半正定矩阵, 所以它的特征值都为非负实数, 可排列为 $q_1(G) \geq q_2(G) \geq \dots \geq q_n(G) \geq 0$, 我们称 $Q(G)$ 的特征值为图 G 的拟拉普拉斯特征值或 Q -特征值。

对于一个连通图来说, 它的最小 Q -特征值为零当且仅当它是二部图。Desai 等^[1] 讨论了图的最小 Q -特征值与图的二部性之间的关系, 建议用最小 Q -特征值来衡量一个图的非二部程度; Fallat 等^[2] 将图的最小 Q -特征值定义为图的代数二部度(algebraic bipartiteness), 引入图的点二部度、边二部度概念, 并建立了与代数二部度的联系; Cardoso 等^[3] 确定了最小 Q -特征值达到最小的 n 阶非二部连通图为三圈的一个顶点上接出一条路所得到的图; 汪毅等^[4] 研究了图的一个偶分支从一个顶点移接到另一个顶点时图的最小 Q -特征值, 并证明了最小 Q -特征值的一个扰动定理, 由此刻画了在含有某个给定非二部图作

为诱导子图的连通图类中最小 Q -特征值达到最小的图的结构。此后, 人们先后对许多非二部连通图类和非二部单圈图类确定了最小 Q -特征值达到最小的图^[2,4-11]。

单圈图是边数等于顶点数加 1 的简单连通图。对于给定阶数和悬挂点数的非二部单圈图, 范益政等^[12] 确定了最小 Q -特征值达到最小的图, 本文继续研究给定阶数和悬挂点数的非二部单圈图, 确定了最小 Q -特征值达到第二小的图。

1 预备知识

C_n 和 P_n 分别表示阶为 n 的圈和路。令 $G - u, G - uv$, 分别表示 G 中去掉顶点 u 和去掉边 uv 后得到的图。同样地, $G + uv$ 表示在图 G 中增加边 $uv \notin E(G)$ 得到的图, 这里 $u, v \in V(G)$ 。度为 1 的顶点称为图 G 的悬挂点, 邻接于悬挂点的顶点称为 G 的悬挂邻点, 与悬挂点关联的边称为 G 的悬挂边。对于 $v \in V(G)$, $N_G(v)$ 定义为图 G 中顶点 v 的所有邻点组成的集合, 我们用 $d_G(u, v)$ (或 $d(u, v)$) 表示 G 中顶点 u 和 v 之间的距离, 这里 $u, v \in V(G)$ 。

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 那么 \mathbf{x} 可以看成是定义在 $V(G)$ 上的一个函数, 也就是说 \mathbf{x} 是顶

收稿日期: 2015-05-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171290); 江苏省自然科学基金(BK20151295)

作者简介: 刘晓蓉(1990-), 女, 青海同仁人, 硕士生, 主要研究方向为图论。

点 v_i 到 $x_i = x(v_i)$ 的映射。如果 \mathbf{x} 是对应于某个 Q -特征值的特征向量,那么 $x(v)$ 可自然地看成是 \mathbf{x} 中对应于 v 的分量。不难看出

$$\mathbf{x}^T Q(G) \mathbf{x} = \sum_{uv \in E(G)} [x(u) + x(v)]^2 \quad (1)$$

进而,对于任意一个单位向量 $\mathbf{x} \in R^n$,由对称矩阵的特征值性质知

$$q_n(G) \leq \mathbf{x}^T Q(G) \mathbf{x}$$

等号成立当且仅当 \mathbf{x} 是对应于 $q_n(G)$ 的一个特征向量。

令 G_1 和 G_2 是两个不相交的图, $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$ 。 G_1 和 G_2 的粘合 (coalescence) 用 $G_1(v_1) \diamond G_2(v_2)$ 来表示,它是由 G_1 和 G_2 通过重合顶点 v_1 和 v_2 形成一个新的顶点 u 而得到的图 (详见文献[5])。图 $G_1(v_1) \diamond G_2(v_2)$ 也可以写成 $G_1(u) \diamond G_2(u)$ 。如果连通图 G 可以表示成 $G_1(u) \diamond G_2(u)$,这里 G_1 和 G_2 都是非平凡且连通的,那么分别称 G_1 和 G_2 为图 G 的根点为 u 的一个分支。设 \mathbf{x} 是定义在 G 上的向量, H 是 G 的一个分支,如果对应于向量 \mathbf{x} ,对任意顶点 $p \in V(H)$,都有 $x(p) = 0$ 成立,则称 H 是 G 的对应于向量 \mathbf{x} 的零分支;否则称 H 为对应于向量 \mathbf{x} 的非零分支。

引理 1^[4] 设 G 为 n 阶连通图,它包含以 u 为根点的二部图 H ,如果 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是 G 的对应于 $q_n(G)$ 的特征向量,则

- (i) 若 $x(u) = 0$,则 H 是对应于 \mathbf{x} 的零分支;
- (ii) 若 $x(u) \neq 0$,则对任意的 $p \in V(H)$,有 $x(p) \neq 0$ 。

引理 2^[4] 设 G 是 n 阶非二部连通图, \mathbf{x} 是对应于 $q_n(G)$ 的特征向量, T 是以 u 为根点对应于向量 \mathbf{x} 的非零分支,则 $|x(q)| < |x(p)|$,其中 p, q 为 T 的两个顶点,且 q 在从 u 到 p 的唯一路上。

引理 3^[9] 设 $G = G_1(v_2) \diamond T(u)$, $G^* = G_1(v_1) \diamond T(u)$ 为 2 个 n 阶图,其中 G_1 是一个包含 2 个不同顶点 v_1, v_2 的非二部连通图, T 是一棵非平凡树。如果存在对应于 $q_n(G)$ 的特征向量 $\mathbf{x} = (x(v_1), x(v_2), \dots, x(v_n))^T$,使得 $|x(v_1)| > |x(v_2)|$ 或 $|x(v_1)| = |x(v_2)| > 0$,那么 $q_n(G^*) < q_n(G)$ 。

引理 4^[9] 设 $G = C(v_0) \diamond B(v_0)$,其中 $C = v_0 v_1 v_2 \dots v_k u_k u_{k-1} \dots u_1 v_0$ 是一个长为 $2k + 1$ 的圈, B 是一个阶数为 $n - 2k$ 的偶图,如图 1 所示,那么存在关于 $q_n(G)$ 的一个特征向量 $\mathbf{x} = (x(v_0), x(v_1), x(v_2), \dots, x(v_k), x(u_1), x(u_2), \dots, x(u_k),$

$\dots)^T$,满足

- (i) $|x(v_0)| = \max \{ |x(w)| \mid w \in V(C) \} > 0$;
- (ii) $x(v_i) = x(u_i), i = 1, 2, \dots, k$;
- (iii) $x(v_i)x(v_{i-1}) \leq 0, x(u_i)x(u_{i-1}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k$ 。

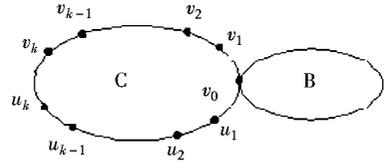


图 1 $C(v_0) \diamond B(v_0)$

Fig.1 $C(v_0) \diamond B(v_0)$

此外,若 $2k + 1 < n$,则 $q_n(G)$ 的重数为 1,且对应于 $q_n(G)$ 的任一特征向量 \mathbf{x} 均满足 (i), (ii), (iii)。

$U_n^k(g)$ 表示阶为 n ,围长为 g (奇数),并且有 k 个悬挂点的单圈图,如图 2 所示,这里 $k \geq 1, l \geq 0, g + l + k = n$ 。 $C_3^1(n - k - 1)$ 是阶为 n 的一个单圈图如图 3 所示,。

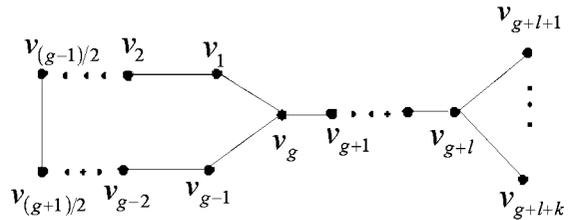


图 2 $U_n^k(g)$

Fig.2 $U_n^k(g)$

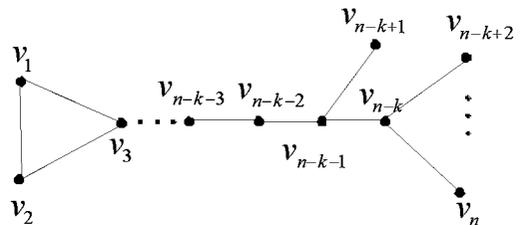


图 3 $C_3^1(n - k - 1)$

Fig.3 $C_3^1(n - k - 1)$

2 主要结果

U_n^k 表示阶为 n 、有 k 个悬挂点的非偶单圈图的集合,从文献[12]可知, $U_n^k(3)$ 是 U_n^k 中唯一的最小 Q -特征值达到最小的图,下文将确定 U_n^k 中最小 Q -特征值达到第二小的图。

如果 $k = 1$,从文献[12]可知 $q_n(U_n^1(3)) <$

$$q_n(U_n^1(5)) < q_n(U_n^k(7)) < \dots$$

定理 1 设 $n \geq 7, 2 \leq k \leq n - 4$ 。 $C_3^1(n - k - 1)$ 是 $U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 中唯一的最小 Q -特征值达到最小的图。

证明 设 G 是 $U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 中最小 Q -特征值达到最小的图,并且 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是对应于 $q_n(G)$ 的单位特征向量,令 $C_g = v_1 v_2 \dots v_g v_1$ 是 G 中唯一的圈,则 g 是奇数。一个单圈图要么是一个圈,要么是在一个圈的某些顶点上接出一些树所得到的图,那么 G 可以看成以 C_g 上的顶点 v_1, \dots, v_g 为根分别接出树 T_1, \dots, T_g 得到的,这里 T_i 包含根顶点 v_i 。 $|V(T_i)| = 1$ 表示 $V(T_i) = \{v_i\}$, 这时 T_i 就称为一棵平凡树。

首先,我们断言 G 是圈 $C_g = v_1 v_2 \dots v_g v_1$ 的某个顶点上接出一棵非平凡树得到的,否则,我们假设 G 是圈 C_g 上 $s (\geq 2)$ 个不同顶点处接出非平凡树而得到的。假设 v_i 是圈 C_g 上的一个顶点使得 $|x_i| \geq |x_j|, i = 1, 2, \dots, g$, 则由引理 1 知, $x_i \neq 0$, 否则,可得 $\mathbf{x} = 0$, 与 \mathbf{x} 为特征向量矛盾。设 v_i 是圈 C_g 上的另一顶点,在 v_i 处接出一棵非平凡树,令

$$G_1 = G - \sum_{v \in N_{T_1}(v_i)} v_i v + \sum_{v \in N_{T_1}(v_i)} v_i v$$

则 $G_1 \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$, 由引理 3 可得 $q_n(G_1) < q_n(G)$ 。若 G_1 圈上接出的非平凡树多于 1 棵,那么对该非平凡树反复使用引理 3 可得单圈图 G^* , 使得 $G^* \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 是圈 $C_g = v_1 v_2 \dots v_g v_1$ 上接出一棵非平凡树而得到的图, $q_n(G^*) \leq q_n(G_1)$, 从而 $q_n(G^*) < q_n(G)$, 产生矛盾,因而 G 是圈 $C_g = v_1 v_2 \dots v_g v_1$ 上只接一棵树而得到的。我们不妨假设这棵非平凡树为 T_g 。

其次,我们断言 $g = 3$, 否则,我们假设 $g \geq 5$, 根据引理 3 可知 $x_{(g-3)/2} = x_{(g+3)/2} = 0$ 。 令

$$G' = G - v_{(g-1)/2} v_{(g-3)/2} + v_{(g-1)/2} v_{(g+3)/2}$$

显然, $G' \in U_n^{k+1}$, 并且从(1)中有

$$q_n(G') \leq \sum_{uv \in E(G')} [x(u) + x(v)]^2 = \sum_{uv \in E(G)} [x(u) + x(v)]^2 = q_n(G)$$

令 v_i 是 G 的一个悬挂点,假设 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是对应于 $q_n(G')$ 的单位特征向量,根据引理 2, 有 $|y(v_i)| > |y(v_g)| > 0$ 。 令

$$G'' = G' - v_1 v_g + v_1 v_i$$

显然 $G'' \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$, 根据引理 3, 有 $q_n(G'') < q_n(G')$, 因而 $q_n(G'') < q_n(G)$, 产生矛盾,因此 $g = 3$ 。

第三,我们断言 G 有 2 个悬挂邻点, 否则,假

设 G 有 $s \geq 3$ 个悬挂邻点,令 v_s 和 v_t 是 G 的 2 个悬挂邻点,对 v_s 和 v_t 应用引理 3 可得到图 $G' \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 使得 $q_n(G') < q_n(G)$, 产生矛盾,因此 G 有 2 个悬挂邻点。令 v_a 是 G 的距 v_3 最远的一个悬挂邻点, v_b 为 G 的另一个悬挂邻点。

第四,我们断言 v_b 在路 $v_3 - v_a$ 上, 否则,假设 v_b 不在路 $v_3 - v_a$ 上,对 v_a 和 v_b 应用引理 3 可得到图 $G' \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 使得 $q_n(G') < q_n(G)$, 产生矛盾,所以 v_b 在路 $v_3 - v_a$ 上。

第五,我们断言 v_a 和 v_b 是相邻的, 否则,我们假设 v_a 和 v_b 是不相邻的。令 $v_c \in N_G(v_b)$ 是 $v_b - v_a$ 上的一个顶点,那么根据引理 2, 有 $|x_c| > |x_b|$ 。 令 v_t 是邻接于 v_b 的悬挂邻点,并且

$$G' = G - v_b v_t + v_c v_t$$

显然, $G' \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 使得 $q_n(G') < q_n(G)$, 产生矛盾,因此 v_a 和 v_b 是相邻的。

最后,我们断言 $d(v_b) = 3$ 。 否则,假设 $d(v_b) > 3$ 。 令 v_t 是邻接于 v_b 的悬挂邻点,并且

$$G' = G - v_b v_t + v_c v_t$$

显然, $G' \in U_n^k \setminus \{U_n^k(3)\}$ 。 根据引理 2, 有 $|x_a| > |x_b|$, 并且根据引理 3, 有 $q_n(G') < q_n(G)$, 产生矛盾,因此 $d(v_b) = 3$ 。

综上所述,我们可以得到 $G = C_3^1(n - k - 1)$, 证毕。

如果 $k = n - 3$, 从文献[12]可知 $U_n^{n-3}(3)$ 是 U_n^{n-3} 中最小 Q -特征值最小的图。设 Δ_k^l 为圈 C_3 一个顶点上接出 k 条悬挂边,另一个顶点上接出 l 条悬挂边所得到的图,其中, $k \geq l \geq 1, k + l = n - 3$ 。

定理 2 设 $n \geq 5, k = n - 3, \Delta_{n-4}^1$ 是 $U_n^{n-3} \setminus \{U_n^{n-3}(3)\}$ 中唯一最小 Q -特征值达到最小的图。

证明 设 G 是 $U_n^{n-3} \setminus \{U_n^{n-3}(3)\}$ 中最小 Q -特征值达到最小的图,并且 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是对应于 $q_n(G)$ 的单位特征向量,则 G 是圈 $C_3 = v_1 v_2 v_3 v_1$ 上接 $n - 3$ 个悬挂点所得到的图。

首先,我们断言 G 的悬挂邻点恰有两个, 否则,假设 G 的悬挂邻点有 3 个, v_a 是圈上的一个顶点使得 $|x_a| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, 由引理 4 知, $x_a \neq 0$, 令 v_i 为不同于 v_a 的任意一个顶点,对 v_a 和 v_i 使用引理 3 可得到图 $G^* \in U_n^{n-3} \setminus \{U_n^{n-3}(3)\}$ 使得 $q_n(G) > q_n(G^*)$, 产生矛盾,所以 G 的悬挂邻点恰有 2 个,我们不妨假设这 2 个悬挂邻点为 v_1 和 v_2 , 且 $d(v_1) \geq d(v_2)$ 。

其次,我们断言 $d(v_2) = 3$, 否则,假设

$d(v_1) \geq d(v_2) > 3$ 。若 $|x_1| < |x_2|$, 则 $d(v_1) > d(v_2) > 3$ 。在顶点 v_1 处去掉 $d(v_1) - d(v_2)$ 悬挂边, 在顶点 v_2 处增加 $d(v_1) - d(v_2)$ 悬挂边, 所得到的图记为 G' 。根据引理 3 可得, $q_n(G) > q_n(G')$, 但显然 $G = G'$, 产生矛盾, 从而 $|x_1| \geq$

$|x_2|, v_s$ 是 v_2 的一个悬挂点。令

$$G^* = G - v_2v_s + v_1v_s$$

显然, $G^* \in U_n^{n-3} \setminus \{U_n^{n-3}(3)\}$ 。根据引理 3 得到 $q_n(G^*) < q_n(G)$, 产生矛盾, 所以 $d(v_2) = 3$ 。

综上所述, 我们可以得到 $G = \Delta_{n-4}^1$, 证毕。

参考文献:

[1] Desai M, Rao V. A characterization of the smallest eigenvalue of a graph[J]. J. Graph Theory, 1994, 18(2): 181 - 194.
 [2] Fallat S, Fan Y Z. Bipartiteness and the least eigenvalue of signless Laplacian of graphs[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2012, 436(9): 3 254 - 3 267.
 [3] Cardoso D M, Cvetkovic D, Rowlinson P, et al. A sharp lower bound for the least eigenvalue of the signless Laplacian of a non - bipartite graph[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2008, 429(11 - 12): 2 770 - 2 780.
 [4] Wang Y, Fan Y Z. The least eigenvalue of signless Laplacian of graphs under perturbation[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2012, 436(7): 2 084 - 2 092.
 [5] Lima L S D, Oliveira C S, Abreu N M M D, et al. The smallest eigenvalue of the signless Laplacian[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2011, 435(10): 2 570 - 2 584.
 [6] Fan Y Z, Tan Y Y. The least eigenvalue of signless Laplacian of non - bipartite graphs with given domination number[J]. Discrete Math, 2014, 334(334): 20 - 25.
 [7] Li S, Wang S. The least eigenvalue of the signless Laplacian of the complements of trees[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2012, 436(7): 2 398 - 2 405.
 [8] Liu R, Wan H, Yuan J, et al. The least eigenvalue of the signless Laplacian of non - bipartite unicyclic graphs with k pendant vertices[J]. Electron J. Linear Algebra, 2013, 26(2): 333 - 344.
 [9] Yu G L, Guo S G, Xu M L. On the least signless Laplacian eigenvalue of some graphs[J]. Electron J. of Linear Algebra, 2013, 26(8): 560 - 573.
 [10] Yu G, Guo S G, Zhang R, et al. The domination number and the least Q - eigenvalue[J]. Applied Mathematics & Computation, 2013, 244(2): 274 - 282.
 [11] Yu G D, Fan Y Z, Wang Y. Quadratic forms on graphs with application to minimizing the least eigenvalue of signless Laplacian over bicycle graphs[J]. Electron, J. Linear Algebra, 2014, 27(3): 213 - 236.
 [12] Fan Y Z, Wang Y, Guo H. The least eigenvalues of signless Laplacian of non - bipartite graphs with pendant vertices[J]. Discrete Math, 2012, 313(7): 903 - 909.

The Non - bipartite Unicyclic Graph with Fixed Number of Pendant Vertices Whose Least Q - eigenvalue Attains the Second Smallest

LIU Xiaorong^{1,2}, ZHANG Rong²

(1. Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai 810008, China;
 (2. School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng Jiangsu 224002, China)

Abstract: The least Q - eigenvalue of a graph is often used to measure non - bipartiteness of the graph, which is widely concerned by researchers. Let $U_n^k(3)$ be the graph of order n which is obtained by attaching a cycle C_3 to an end vertex of a path P_{n-k-2} and attaching k pendant edges to the other end vertex of the path P_{n-k-2} . Recently, Yi - Zheng Fan et al. proved that $U_n^k(3)$ was the unique graph whose least Q - eigenvalue attained the minimum among all graphs of order n with k pendant vertices. In this paper, we proved that $C_3^1(n - k - 1)$ is the unique graph whose least Q - eigenvalue attains the second smallest value, where $C_3^1(n - k - 1)$ is the graph obtained from $U_n^k(3)$ by relocating a pendant edge to the non - pendant vertex which is adjacent the pendant neighbor.

Keywords: Non - bipartite unicyclic graph; Pendant vertices; Least eigenvalue

(责任编辑:张英健)