

独立同分布序列部分和之和精确渐近性的一般形式

邹广玉

(长春工程学院 理学院,吉林 长春 130012)

摘要:利用独立同分布序列部分和之和的渐近性质,得到其精确渐近性的一般形式,丰富了独立同分布序列精确渐近性的结果。

关键词:独立同分布序列;部分和之和;精确渐近性

中图分类号:O211.4 文献标识码:A 文章编号:1671-5322(2015)04-00015-02

“部分和之和”的极限理论起源于 Resnick^[1]和 Arnold 等^[2]对记录值分布的研究,在时间序列分析、破产理论等领域有着广泛应用,很多学者对其极限性质进行了研究。如文献[3]研究了独立同分布随机变量序列部分和之和的大数定律和中心极限定理,文献[4]研究了同分布 NA 随机变量序列部分和之和的强大数定律,文献[5]讨论了独立同分布序列部分和之和的完全收敛性等等,文献[6]研究了 NA 序列部分和之和的大数定律和重对数律的精确渐近性。本文给出独立同分布序列部分和之和精确渐近性的一般形式,主要结果如下:

定理 1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量列,满足 $EX_1 = 0, EX_1^2 = \sigma^2 > 0$, 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $T_n = \sum_{i=1}^n S_i$; 又设函数 $\varphi(x)$ 是定义在 $[1, \infty)$ 上的非负可导函数,满足 $\varphi(x) \uparrow \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x+1)}{\varphi'(x)} = 1$, 则当 $s > \frac{1}{2}$ 时,有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'(n) P\{|T_n| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \varepsilon n^{\frac{3}{2}} \varphi^s(n)\} = E|N|^{\frac{1}{s}} \tag{1}$$

其中 N 为标准正态分布随机变量。

注:(1)当 $1/3 \leq p < r < 2/3 \wedge (2-2p)$ 时,取 $s = \frac{2-3p}{2(r-p)}, \varphi(n) = n^{\frac{r-p}{p}}$, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-3p}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P\{|T_n| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \varepsilon n^{1/p}\} = \frac{p}{r-p} E|N|^{\frac{2(r-p)}{2-3p}} \tag{2}$$

(2) 当 $-1 < \alpha < 0$ 时,取 $s = \frac{1}{2(\alpha+1)}$,

$\varphi(n) = (\log n)^{\alpha+1}$, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n} P\{|T_n| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \varepsilon \sqrt{n^3 \log n}\} = \frac{E|N|^{2(\alpha+1)}}{\alpha+1} \tag{3}$$

式中 $\log x = \ln(x \vee e)$

式(2)和式(3)分别是文献[6]中定理 1 和定理 3 在独立情形时的结论。

1 两个引理

在定理 1 的条件下有两个引理:

引理 1^[3] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ET_n^2}{n^3} = \frac{\sigma^2}{3}$

引理 2^[3] $\frac{\sqrt{3}T_n}{\sigma n^{3/2}} \xrightarrow{D} N, n \rightarrow \infty$ 。

2 定理 1 的证明

在下面各命题的证明中,不失一般性,不妨假设 $\sigma^2 = 3, C$ 在不同的位置表示不同的正常数,记 $b(\varepsilon) = \lceil \varphi^{-1}(M\varepsilon^{-\frac{1}{s}}) \rceil, M > 2$ 。定理 1 可由以下

收稿日期:2015-06-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11401190);吉林省教育厅资助项目(120120113);长春工程学院青年基金资助项目(320130019)

作者简介:邹广玉(1982-),男,吉林通化人,讲师,博士,主要研究方向为概率极限理论。

几个命题推得。

命题 1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'(n) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\} = E|N|^{\frac{1}{s}}$$

证明:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'(n) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\} &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \int_1^{\infty} \varphi'(x) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(x)\} dx &= \\ \frac{1}{s} \int_0^{\infty} y^{\frac{1-s}{s}} P\{|N| \geq y\} dy &= E|N|^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

命题 2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n \leq b(\varepsilon)} \varphi'(n) |P\{|T_n| \geq \varepsilon n^{\frac{3}{2}} \varphi^s(n)\} - P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\}| = 0$$

证明:记

$$\Delta_n = \sup_x |P\{|T_n| \geq n^{3/2} x\} - P\{|N| \geq x\}|$$

则由引理 2 知 $\Delta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 结合 Toeplitz 引理^[7]有:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n \leq b(\varepsilon)} \varphi'(n) |P\{|T_n| \geq \varepsilon n^{\frac{3}{2}} \varphi^s(n)\} - P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\}| &\leq \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n \leq b(\varepsilon)} \varphi'(n) \Delta_n = \\ \varepsilon^{\frac{1}{s}} \varphi(b(\varepsilon)) \cdot \frac{1}{\varphi(b(\varepsilon))} \sum_{n \leq b(\varepsilon)} \varphi'(n) \Delta_n &\leq \end{aligned}$$

$$M \cdot \frac{1}{\varphi(b(\varepsilon))} \sum_{n \leq b(\varepsilon)} \varphi'(n) \Delta_n \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

命题 3 关于 $0 < \varepsilon < 1$ 一致地有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n > b(\varepsilon)} \varphi'(n) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\} = 0$$

证明:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n > b(\varepsilon)} \varphi'(n) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(n)\} &\leq \\ C \varepsilon^{\frac{1}{s}} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \varphi'(x) P\{|N| \geq \varepsilon \varphi^s(x)\} dx &= \\ C \int_{M_s}^{\infty} y^{\frac{1}{s}-1} P\{|N| \geq y\} dy \rightarrow 0, M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

命题 4 关于 $0 < \varepsilon < 1$ 一致地有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n > b(\varepsilon)} \varphi'(n) P\{|T_n| \geq \varepsilon n^{\frac{3}{2}} \varphi^s(n)\} = 0$$

证明:由马尔可夫不等式和引理 1, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n > b(\varepsilon)} \varphi'(n) P\{|T_n| \geq \varepsilon n^{\frac{3}{2}} \varphi^s(n)\} &\leq \\ \varepsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n > b(\varepsilon)} \varphi'(n) \frac{ET_n^2}{\varepsilon^2 n^3 \varphi^{2s}(n)} &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \varepsilon^{\frac{1}{s}-2} \sum_{n > b(\varepsilon)} \frac{\varphi'(n)}{\varphi^{2s}(n)} &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{s}-2} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi^{2s}(x)} dx \leq \\ C \varepsilon^{\frac{1}{s}-2} \varphi^{1-2s}(b(\varepsilon)) &= CM^{1-2s} \rightarrow 0, M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

由命题 1 ~ 4 并结合三角不等式可知式(1)成立。

参考文献:

- [1] Resnick S L. Limit Laws for Record Values[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1973, 1(1): 67 - 82.
- [2] Arnold B C, Villasenor J A. The Asymptotic Distributions of Sums of Records[J]. Extremes, 1998, 1(3): 351 - 363.
- [3] 江涛, 林日其. I. I. D. 随机变量部分和之和的极限定理[J]. 淮南工业学院学报, 2002, 22(2): 73 - 75.
- [4] 宇世航. 同分布 NA 序列部分和之和的强大数定律[J]. 山东大学学报: 理学版, 2008, 43(4): 62 - 66.
- [5] 兰冲锋, 吴群英. I. I. D 序列部分和之和的完全收敛性探讨[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2012, 50(3): 507 - 510.
- [6] 邹广玉, 吕阳阳. NA 序列部分和之和的大数定律和重对数律的精确渐近性[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2015, 53(1): 54 - 58.
- [7] STOUT W F. Almost Sure Convergence[M]. New York: Academic Press, 1995: 120.

General Law of Precise Asymptotics for the Sum of Partial Sums of Independent and Identically Distributed Sequences

ZHOU Guangyu

(School of Science, Changchun Institute of Technology, Changchun Jilin 130012, China)

Abstract: Applying the asymptotic properties for the sum of partial sums of independent and identically distributed sequences, the author obtained a general law of precise asymptotics for the sum of partial sums of independent and identically distributed sequences, which enrich the results of precise asymptotics for independent and identically distributed sequences.

Keywords: independent and identically distributed sequence; sum of partial sums; precise asymptotics

(责任编辑: 张英健)