

非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ 的优美标号

吴跃生

(华东交通大学 理学院,江西 南昌 330013)

摘要:讨论了非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ 的优美性,给出了非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ 是优美图的 4 个充分条件。

关键词:优美图;交错图;非连通图;优美标号

中图分类号:O157.5 文献标识码:A 文章编号:1671-5322(2016)04-0071-06

引言与概念

定义 1^[1] 对于一个图 $G=(V,E)$,如果存在一个单射 $\theta:V(G) \rightarrow [0,|E(G)|]$,使得对所有边 $e=(u,v) \in E(G)$,由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的映射 $\theta'E(G) \rightarrow [1,|E(G)|]$ 是一一对应,则称 G 是优美图, θ 是 G 的一组优美标号。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题^[1-5]。文献[2]已经证明:非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m}$ 是优美图,本文讨论非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ 的优美性。

定义 2^[3] G 是一个优美二部图,其优美标号为 $\theta,V(G)$ 划分成两个集合 X,Y ,如果

$$\max_{v \in X} \{ \theta(v) \} = k < \min_{v \in Y} \{ \theta(v) \} = k + 1$$

则称 θ 是 G 的交错标号, k 为交错标号 θ 的特征值, G 是在交错标号 θ 下的交错图。

本文所讨论的图均为无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, G_{k+m} 表示图 G 是特征为 k 且缺 $k+m$ 标号值的交错图; $[m,n]$ 表示整数集合 $\{m,m+1,\cdots,n\}$,其中 m 和 n 均为非负整数,且满足 $0 \leq m < n$ 。其它未说明的符号及术语均同文献[1]。

主要结果及其证明

定理 1 对任意正整数 m ,如果图 G 是特征为 k ,且缺 $k+2,k+3,\cdots,k+5m$ 标号值的交错

图,那么非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G$ 存在缺 $k+1,k+2,\cdots,k+5m-1$ 标号值的优美标号。

证 设 $V(C_{4m})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\},E(C_{4m})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\},V(C_{8m})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{8m}\},E(C_{8m})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{8m-1}y_{8m},y_{8m}y_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化, θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max_{v \in X} \{ \theta_1(v) \} = k < \min_{v \in Y} \{ \theta_1(v) \} = k+1,|E(G)|=q_0$ 。

定义 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i) = \begin{cases} 13m+1-\frac{i}{2}+k, & i=2,4,\cdots,2m-2; \\ 13m-\frac{i}{2}+k, & i=2m,2m+2,\cdots,4m-2; \\ 7m+k, & i=4m; \\ 9m+\frac{i+1}{2}+k, & i=1,3,5,\cdots,4m-1 \end{cases}$$
$$\theta(y_i) = \begin{cases} 17m-\frac{i}{2}+1+k, & i=2,4,6,\cdots,8m; \\ \frac{i-1}{2}+k+5m, & i=1,3,5,\cdots,4m-1; \\ \frac{i+1}{2}+k+5m, & i=4m+1,4m+3,\cdots,8m-1 \end{cases}$$

收稿日期:2015-09-15

基金项目:国家自然科学基金项目(11261019;11361024)

作者简介:吴跃生(1959—),男,江西瑞金人,副教授,硕士,主要研究方向为图论。

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v) & v \in X \\ \theta_1(v) + 12m & v \in Y \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G$ 的优美标号。

(1) $\theta: V(C_{4m}) \rightarrow [k+9m+1, k+13m] \cup \{k+7m\} - \{k+12m+1\}$ 是单射;

$\theta: V(C_{8m}) \rightarrow [k+5m, k+9m] \cup [k+13m+1, k+17m] - \{k+7m\}$ 是单射;

$\theta: X \rightarrow [0, k]$ 是单射; $\theta: Y \rightarrow [k+12m+1, q+12m] - \{k+12m+2, k+12m+3, \dots, k+17m\}$ 是单射;

因而, 映射 $\theta: V(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G) \rightarrow [0, q+12m] - \{k+1, k+2, \dots, k+5m-1\}$ 是单射。

(2) $\theta': E(C_{4m}) \rightarrow [1, 4m]$ 是双射;

$\theta': E(C_{8m}) \rightarrow [4m+1, 12m]$ 是双射;

$\theta': E(G) \rightarrow [12m+1, q+12m]$ 是双射。

因而, 映射 $\theta': E(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G) \rightarrow [1, q+12m]$ 是一一对应。

所以 θ 就是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G$ 的缺 $k+1, k+2, \dots, k+5m-1$ 标号值的优美标号。证毕。

引理 1^[1] 对任意自然数 $m, n (m \geq 2, n \geq 2)$, 完备二分图 $K_{m,n}$ 存在特征为 $m-1$ 且缺 $m+1, m+2, \dots, 2m-1$ 的交错标号。

由于 $m+1 = (m-1) + 2, m+2 = (m-1) + 3, \dots, 2m-1 = (m-1) + m$, 由定理 1 和引理 1 有:

推论 1 对任意正整数 m, s, t , 当 $s \geq (5m-1), t \geq 2$ 时, 则非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup K_{s,t}$ 存在缺 $s, s+1, \dots, s+5m-2$ 标号值的优美标号。

例 1 当 $m=2, s=10, t=3$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup K_{10,3}$ 存在缺 10, 11, $\dots, 18$ 标号值的优美标号。非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup K_{10,3}$ 中 $C_8 \cup C_{16}$ 的优美标号为:

$C_8: 28, 35, 29, 33, 30, 32, 31, 23;$

$C_{16}: 19, 43, 20, 42, 21, 41, 22, 40, 24, 39, 25, 38, 26, 37, 27, 36。$

非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup K_{10,3}$ 中 $K_{10,3}$ 的优美标号如图 1 所示。

引理 2^[6] 对任意自然数 n , 当 $n \geq 2$ 时, C_{2n+1} 是有 $2n+1$ 个顶点的圈, G_{n-1} 是边数为 $n-1$ 的优美图, 则非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 是优美的。

因为 $E(C_{4m} \cup C_{8m}) = 12m$, 由引理 2 有

推论 2 设 m 为任意的正整数, 则非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup C_{2(12m+1)+1}$ 是优美的。

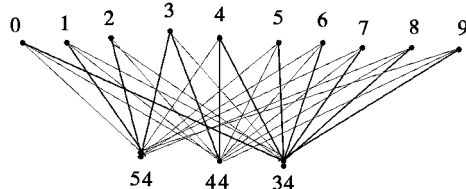


图 1 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup K_{10,3}$ 中 $K_{10,3}$ 的优美标号

Fig. 1 The graceful labeling of the unconnected graph $K_{10,3}$ of $C_8 \cup C_{16} \cup K_{10,3}$

因为 $E(C_{4m} \cup C_{8m} \cup K_{s,t}) = 12m + st$, 由推论 1 引理 2 有

推论 3 对任意正整数 m, s, t , 当 $s \geq (5m-1), t \geq 2$ 时, 则非连通图 $(C_{4m} \cup C_{8m} \cup K_{s,t}) \cup C_{2(12m+st+1)+1}$ 是优美的。

定理 2 对任意正整数 $m, (k+8m) \leq |E(G_{k+8m})|$, 那么非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}$ 存在缺 $k+5m-1$ 标号值的优美标号。

证 设 $V(C_{4m}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{4m}\}, E(C_{4m}) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{4m-1}x_{4m}, x_{4m}x_1\}, V(C_{8m}) = \{y_1, y_2, \dots, y_{8m}\}, E(C_{8m}) = \{y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{8m-1}y_{8m}, y_{8m}y_1\}$, 设 X, Y 是图 G_{k+8m} 的一个二分法, θ_1 是图 G_{k+8m} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \{\theta_1(v)\} = k < \min_{v \in Y} \{\theta_1(v)\} = k+1, |E(G)| = q, |E(G_{k+8m})| = q$

定义 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i) = \begin{cases} 4m-1 + \frac{i}{2} + k, & i = 2, 4, \dots, 2m-2; \\ 4m + \frac{i}{2} + k, & i = 2m, 2m+2, \dots, 4m-2; \\ 10m + k, & i = 4m; \\ 8m - \frac{i+1}{2} + k, & i = 1, 3, \dots, 4m-1 \end{cases}$$

$$\theta(y_i) = \begin{cases} \frac{i}{2} + k, & i = 2, 4, 6, \dots, 8m-2; \\ 20m + k, & i = 8m; \\ 12m - \frac{i-1}{2} + k, & i = 1, 3, 5, \dots, 4m-1; \\ 12m - \frac{i+1}{2} + k, & i = 4m+1, 4m+3, \dots, 8m-1 \end{cases}$$

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), & v \in X, \\ \theta_1(v) + 12m, & v \in Y \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}$ 的优美标号。

(1) $\theta: V(C_{4m}) \rightarrow [k+4m, k+8m-1] \cup \{k+10m\} - \{k+5m-1\}$ 是单射;

$\theta: V(C_{8m}) \rightarrow [k+1, k+4m-1] \cup [k+8m, k+12m] \cup \{20m+k\} - \{k+10m\}$ 是单射;

$\theta: X \rightarrow [0, k]$ 是单射; $\theta: Y \rightarrow [k+12m+1, q+12m] - \{k+20m\}$ 是单射;

因而, 映射 $\theta: V(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}) \rightarrow [0, q+12m] - \{k+5m-1\}$ 是单射。

(2) $\theta': E(C_{4m}) \rightarrow [1, 4m]$ 是双射;

$\theta': E(C_{8m}) \rightarrow [4m+1, 12m]$ 是双射;

$\theta': E(G_{k+8m}) \rightarrow [12m+1, q+12m]$ 是双射。

因而, 映射 $\theta': E(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}) \rightarrow [1, q+12m]$ 是一一对应。

所以 θ 就是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}$ 的缺 $k+5m-1$ 标号值的优美标号。证毕。

定理 3 对任意正整数 $m, k+8m+1 \leq |E(G_{k+8m+1})|$, 那么非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m+1}$ 存在缺 $k+7m+1$ 标号值的优美标号。

证 设 $V(C_{4m}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{4m}\}, E(C_{4m}) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{4m-1}x_{4m}, x_{4m}x_1\}, V(C_{8m}) = \{y_1, y_2, \dots, y_{8m}\}, E(C_{8m}) = \{y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{8m-1}y_{8m}, y_{8m}y_1\}$, 设 X, Y 是图 G_{k+8m+1} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+8m+1} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \{\theta_1(v)\} = k < \min_{v \in Y} \{\theta_1(v)\} = k+1, |E(G_{k+8m+1})| = q$ 。

定义 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m+1}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i) = \begin{cases} 8m+1 - \frac{i}{2} + k, & i = 2, 4, \dots, 2m-2; \\ 8m - \frac{i}{2} + k, & i = 2m, 2m+2, \dots, 4m-2; \\ 2m+k, & i = 4m; \\ 4m + \frac{i+1}{2} + k, & i = 1, 3, \dots, 4m-1 \end{cases}$$

$$\theta(y_i) = \begin{cases} \frac{i}{2} + k, & i = 2, 4, \dots, 4m-2; \\ \frac{i}{2} + k+1, & i = 4m, 4m+2, 8m-2; \\ 20m+1+k, & i = 8m; \\ 12m - \frac{i-1}{2} + k, & i = 1, 3, \dots, 8m-1 \end{cases}$$

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), & v \in X, \\ \theta_1(v) + 12m, & v \in Y \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m+1}$ 的优美标号。

(1) $\theta: V(C_{4m}) \rightarrow [k+4m+1, k+8m] \cup \{k+2m\} - \{k+7m+1\}$ 是单射;

$\theta: V(C_{8m}) \rightarrow [k+1, k+4m] \cup [k+8m+1, k+12m] \cup \{20m+1+k\} - \{k+2m\}$ 是单射;

$\theta: X \rightarrow [0, k]$ 是单射; $\theta: Y \rightarrow [k+12m+1, q+12m] - \{k+20m+1\}$ 是单射;

因而, 映射 $\theta: V(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G) \rightarrow [0, q+12m] - \{k+7m+1\}$ 是单射。

(2) $\theta': E(C_{4m}) \rightarrow [1, 4m]$ 是双射;

$\theta': E(C_{8m}) \rightarrow [4m+1, 12m]$ 是双射;

$\theta': E(G_{k+8m+1}) \rightarrow [12m+1, q+12m]$ 是双射。

因而, 映射 $\theta': E(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G) \rightarrow [1, q+12m]$ 是一一对应。

所以 θ 就是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G$ 的缺 $k+5m-1$ 标号值的优美标号。证毕。

定理 4 对任意正整数 $m, k+12m-1 \leq |E(G_{k+12m-1})|$, 那么非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+12m-1}$ 存在缺 $k+5m-1$ 标号值的优美标号。

证 设 $V(C_{4m}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{4m}\}, E(C_{4m}) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{4m-1}x_{4m}, x_{4m}x_1\}, V(C_{8m}) = \{y_1, y_2, \dots, y_{8m}\}, E(C_{8m}) = \{y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{8m-1}y_{8m}, y_{8m}y_1\}$, 设 X, Y 是图 $G_{k+12m-1}$ 的一个二分化, θ_1 是图 $G_{k+12m-1}$ 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \{\theta_1(v)\} = k < \min_{v \in Y} \{\theta_1(v)\} = k+1, |E(G)| = q, |E(G_{k+12m-1})| = q$ 。

定义 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+12m-1}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i) = \begin{cases} 4m-1 + \frac{i}{2} + k, & i = 2, 4, \dots, 2m-2; \\ 4m + \frac{i}{2} + k, & i = 2m, 2m+2, \dots, 4m-2; \\ 10m+k, & i = 4m; \\ 8m - \frac{i+1}{2} + k, & i = 1, 3, \dots, 4m-1 \end{cases}$$

$$\theta(y_i) = \begin{cases} 24m-1+k, & i = 2; \\ \frac{i}{2} - 1 + k, & i = 4, 6, \dots, 8m; \\ 12m - \frac{i-1}{2} + k, & i = 1, 3, 5, \dots, 4m-1; \\ 12m - \frac{i+1}{2} + k, & i = 4m+1, 4m+3, \dots, 8m-1 \end{cases}$$

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), & v \in X, \\ \theta_1(v) + 12m, & v \in Y \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+12m-1}$ 的优美标号。

(1) $\theta: V(C_{4m}) \rightarrow [k+4m, k+8m-1] \cup \{k+10m\} - \{k+5m-1\}$ 是单射;

$\theta: V(C_{8m}) \rightarrow [k+1, k+4m-1] \cup [k+8m, k+12m] \cup \{24m-1+k\} - \{k+10m\}$ 是单射;

$\theta: X \rightarrow [0, k]$ 是单射; $\theta: Y \rightarrow [k+12m+1, q+12m] - \{k+24m-1\}$ 是单射;

因而,映射 $\theta: V(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+8m}) \rightarrow [0, q + 12m] - \{k + 5m - 1\}$ 是单射。

(2) $\theta': E(C_{4m}) \rightarrow [1, 4m]$ 是双射;

$\theta': E(C_{8m}) \rightarrow [4m + 1, 12m]$ 是双射;

$\theta': E(G_{k+12m-1}) \rightarrow [12m + 1, q + 12m]$ 是双射。

因而,映射 $\theta': E(C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+12m-1}) \rightarrow [1, q + 12m]$ 是一一对应。

所以 θ 就是非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+12m-1}$ 的缺 $k + 5m - 1$ 标号值的优美标号。证毕。

定义 4^[4] $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 的每个顶点 u_i 都粘接了 r_i 条悬挂边(r_i 为自然数, $i = 1, 2, \dots, n$) 所得到的图, 称为图 G 的 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ -冠, 简记为 $G(r_1, r_2, \dots, r_n)$ 。特别地, 当 $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ 时, 称为图 G 的 r -冠。图 G 的 0-冠就是图 G 。

引理 3^[4] 对任意正整数 m , 任意自然数 r , 则 $C_{4m}(r, r, \dots, r)$ 存在特征为 $2m(r + 1) - 1$, 且缺 $3m(r + 1)$ 的交错标号。

注意到: $3m(r + 1) = 2m(r + 1) - 1 + m(r + 1) + 1$, 由定理 2 和引理 3 有

推论 4 对任意正整数 m, n , 任意自然数 r , 当 $8m - 1 = n(r + 1)$ 时, 非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup C_{4n}(r, r, \dots, r)$ 存在缺 $21m - 4$ 标号值的优美标号。

例 3 由推论 4 给出的当 $m = 2, n = 15, r = 0$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{60}$ 存在缺标号值 38 的优美标号为:

$$C_8: 44, 37, 43, 39, 42, 40, 41, 49;$$

$$C_{16}: 53, 30, 52, 31, 51, 32, 50, 33, 48, 34, 47, 25, 46, 36, 45, 69;$$

$$C_{60}: 0, 84, 1, 83, 2, 82, 3, 81, 4, 80, 5, 79, 6, 78, 7, 77, 8, 76, 9, 75, 10, 74, 11, 73, 12, 72, 13, 71, 14, 70, 15, 68, 16, 67, 17, 66, 18, 65, 19, 64, 20, 63, 21, 62, 22, 61, 23, 60, 24, 59, 25, 58, 26, 57, 27, 56, 28, 55, 29, 54。$$

由推论 4 给出的当 $m = 2, n = 5, r = 2$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{20}(2, 2, \dots, 2)$ 存在缺标号值 38 的优美标号为:

$$C_8: 44, 37, 43, 39, 42, 40, 41, 49;$$

$$C_{16}: 53, 30, 52, 31, 51, 32, 50, 33, 48, 34, 47, 25, 46, 36, 45, 69;$$

$$C_{20}(2, 2, \dots, 2): 0(84, 83), 82(1, 2), 3(81, 80), 79(4, 5), 6(78, 77), 76(7, 8), 9(75, 74),$$

$$73(10, 11), 12(72, 71), 70(13, 14), 15(68, 67), 66(16, 17), 18(65, 64), 63(19, 20), 21(62, 61), 60(22, 23), 24(59, 58), 57(25, 26), 27(56, 55), 54(28, 29)。$$

由推论 4 给出的当 $m = 2, n = 3, r = 4$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{12}(4, 4, \dots, 4)$ 存在缺标号值 38 的优美标号为:

$$C_8: 44, 37, 43, 39, 42, 40, 41, 49;$$

$$C_{16}: 53, 30, 52, 31, 51, 32, 50, 33, 48, 34, 47, 25, 46, 36, 45, 69;$$

$$C_{12}(4, 4, \dots, 4): 0(84, 83, 82, 81), 80(1, 2, 3, 4), 5(79, 78, 77, 76), 75(6, 7, 8, 9), 10(74, 73, 72, 71), 70(11, 12, 13, 14), 15(68, 67, 66, 65), 64(16, 17, 18, 19), 20(63, 62, 61, 60), 59(21, 22, 23, 24), 25(58, 57, 56, 55), 54(26, 27, 28, 29)。$$

由推论 4 给出的当 $m = 2, n = 1, r = 14$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_4(12, 12, 12, 12)$ 存在缺标号值 38 的优美标号为:

$$C_8: 44, 37, 43, 39, 42, 40, 41, 49;$$

$$C_{16}: 53, 30, 52, 31, 51, 32, 50, 33, 48, 34, 47, 25, 46, 36, 45, 69;$$

$$C_4(12, 12, 12, 12): 0(84, 83, 82, 81, 80, 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71), 70(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14), 15(68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 58, 57, 56, 55), 54(16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29)。$$

注意到: $3m(r + 1) = 2m(r + 1) - 1 + m(r + 1) + 1$, 由定理 3 和引理 3 有

推论 5 对任意正整数 m, n , 任意自然数 r , 当 $8m = n(r + 1)$ 时, 非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup C_{4n}(r, r, \dots, r)$ 存在缺 $23m$ 标号值的优美标号。

例 4 由推论 5 给出的当 $m = 2, n = 16, r = 0$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{64}$ 存在缺标号值 46 的优美标号为:

$$C_8: 40, 47, 41, 45, 42, 44, 43, 35;$$

$$C_{16}: 55, 32, 54, 33, 53, 34, 52, 36, 51, 37, 50, 38, 49, 39, 49, 72;$$

$$C_{64}: 0, 88, 1, 87, 2, 86, 3, 85, 4, 84, 5, 83, 6, 82, 7, 81, 8, 80, 9, 79, 10, 78, 11, 77, 12, 76, 13, 75, 14, 74, 15, 73, 16, 71, 17, 70, 18, 69, 19, 68, 20, 67, 21, 66, 22, 65, 23, 64, 24, 63, 25, 62, 26, 61, 27, 60, 28, 59, 29, 58, 30, 57, 31, 56。$$

由推论 5 给出的当 $m = 2, n = 8, r = 1$ 时, 非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{32}(1, 1, \dots, 1)$ 存在缺标号值 46

的优美标号为:

$$C_8:40,47,41,45,42,44,43,35;$$

$$C_{16}:55,32,54,33,53,34,52,36,51,37,50,38,49,39,49,72;$$

$$C_{32}(1,1,\cdots,1):0(88),87(1),2(86),85(3),4(84),83(5),6(82),81(7),8(80),79(9),10(78),77(11),12(76),75(13),14(74),73(15),16(71),70(17),18(69),68(19),20(67),66(21),22(65),64(23),24(63),62(25),26(61),60(27),28(59),58(29),30(57),56(31)。$$

由推论 5 给出的当 $m=2,n=4,r=3$ 时,非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{16}(3,3,\cdots,3)$ 存在缺标号值 46 的优美标号为:

$$C_8:40,47,41,45,42,44,43,35;$$

$$C_{16}:55,32,54,33,53,34,52,36,51,37,50,38,49,39,49,72;$$

$$C_{16}(3,3,\cdots,3):0(88,87,86),85(1,2,3),4(84,83,82),81(5,6,7),8(80,79,78),77(9,10,11),12(76,75,74),73(13,14,15),16(71,70,69),68(17,18,19),20(67,66,65),64(21,22,23),24(63,62,61),60(25,26,27),28(59,58,57),56(29,30,31)。$$

由推论 5 给出的当 $m=2,n=2,r=7$ 时,非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_8(7,7,\cdots,7)$ 存在缺标号值 46 的优美标号为:

$$C_8:40,47,41,45,42,44,43,35;$$

$$C_{16}:55,32,54,33,53,34,52,36,51,37,50,38,49,39,49,72;$$

$$C_8(7,7,\cdots,7):0(88,87,86,85,84,83,82),81(1,2,3,4,5,6,7),8(80,79,78,77,76,75,74),73(9,10,11,12,13,14,15),16(71,70,69,68,67,66,65),64(17,18,19,20,21,22,23),24(63,62,61,60,59,58,57),56(25,26,27,28,29,30,31)。$$

由推论 5 给出的当 $m=2,n=1,r=15$ 时,非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_4(15,15,15,15)$ 存在缺标号值 46 的优美标号为:

$$C_8:40,47,41,45,42,44,43,35;$$

$$C_{16}:55,32,54,33,53,34,52,36,51,37,50,38,49,39,49,72;$$

$$C_4(15,15,15,15):0(88,87,86,85,84,83,82,81,80,79,78,77,76,75,74),73(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15),16(71,70,69,$$

$$68,67,66,65,64,63,62,61,60,59,58,57),56(17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31)。$$

注意到: $3m(r+1)=2m(r+1)-1+m(r+1)+1$,由定理 4 和引理 3 有

推论 6 对任意正整数 m,n ,任意自然数 r ,当 $12m-2=n(r+1)$ 时,非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup C_{4n}(r,r,\cdots,r)$ 存在缺 $29m-6$ 标号值的优美标号。

例 5 由推论 4 给出的当 $m=2,n=22,r=0$ 时,非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup C_{88}$ 存在缺标号值 52 的优美标号为:

$$C_8:58,51,57,53,56,54,55,63$$

$$C_{16}:67,90,66,44,65,45,64,46,62,47,61,48,60,49,59,50;$$

$$C_{88}:0,112,1,111,2,110,3,109,4,108,5,107,6,106,7,105,8,104,9,103,10,102,11,101,12,100,13,99,14,98,15,97,16,96,17,95,18,94,19,93,20,92,21,91,22,89,23,88,24,87,25,86,26,85,27,84,28,83,29,82,30,81,31,80,32,79,33,78,34,77,35,76,36,75,37,74,38,73,39,72,40,71,41,70,42,69,43,68。$$

引理 4^[1] 对任意正整数 m ,则 $2C_{4m}$ 存在特征为 $4m-1$,缺 $6m$ 的交错标号。

注意到: $6m=(4m-1)+2m+1$,由定理 3 和引理 4 有

推论 7 对任意正整数 m ,非连通图 $C_{4m} \cup C_{8m} \cup 2C_{16m}$ 存在缺 $23m$ 标号值的优美标号。

例 6 由推论 6 给出的当 $m=2$ 时,非连通图 $C_8 \cup C_{16} \cup 2C_{32}$ 存在缺标号值 46 的优美标号为:

$$C_8:40,47,41,45,42,44,43,35;$$

$$C_{16}:55,32,54,33,53,34,52,36,51,37,50,38,49,39,49,72;$$

$$C_{32}:0,88,1,87,2,86,3,85,4,84,5,83,6,82,7,81,9,80,10,79,11,78,12,77,13,76,14,75,15,74,16,73,17,72,18,69,19,68,20,67,21,66,22,65,23,64,24,62,25,61,26,60,27,59,28,58,29,57,30,56,31。$$

引理 5^[7] 对任意正整数 m ,非连通图 $2C_{4m} \cup C_{8m}$ 存在特征为 $8m-1$ 且缺 $12m$ 标号值的交错标号。

注意到: $12m=(8m-1)+4m+1$,由定理 3 和引理 5 有

推论 8 对任意正整数 m ,非连通图 $(C_{4m} \cup$

$C_{8m}) \cup (2C_{8m} \cup C_{16m})$ 存在缺 $23m$ 标号值的优美标号。

引理 6^[7] 对任意正整数 m , 非连通图 $2C_{8m} \cup (2C_{4m} \cup C_{8m})$ 存在特征为 $16m - 1$ 且缺 $24m$ 标号值的交错标号。

注意到: $24m = (16m - 1) + 8m + 1$, 由定理 3 和引理 6 有

推论 9 对任意正整数 m , 非连通图 $(C_{4m} \cup C_{8m}) \cup (2C_{8m} \cup (2C_{4m} \cup C_{8m}))$ 存在缺 $23m$ 标号值的优美标号。

参考文献:

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
[2] 董俊超, 马美杰. 一些圈的并的优美性[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2000, 24(1): 25-26.
[3] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报, 1995, 12(4): 110-112.
[4] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \dots, r_{4h})$ - 冠的优美性[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(1): 77-80.
[5] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(G_{r_1}, G_{r_2}, \dots, G_{r_{4h+3}})$ - 冠的优美性[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2013, 34(4): 4-9.
[6] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性[J]. 华东交通大学学报, 2012, 29(6): 26-29.
[7] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $2C_{4m} \cup G$ 的优美性[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版), 2014, 27(4): 240-243.

Graceful Labeling of the Unconnected Graph $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$

WU Yuesheng

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi 330013, China)

Abstract: The gracefulness of the unconnected graph $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ is discussed. Four sufficient conditions are given for the unconnected graph $C_{4m} \cup C_{8m} \cup G_{k+a}$ to be a graceful graph.

Keywords: graceful graph; alternating graph; unconnected graph; graceful labeling

(责任编辑: 张英健)