

考虑红利支付和随机波动的确定缴费型养老金最优投资策略

孙惠玲¹,王传玉²

(1. 安徽信息工程学院 信息工程系,安徽 芜湖 241000; 2. 安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖 241000)

摘要:为研究红利支付和随机波动情形下确定缴费型养老金的最优投资问题,假设:(1)金融市场有 2 种资产,即无风险资产(银行存款)和风险资产(股票),且养老金计划的基金投资在这 2 种资产上;(2)风险资产的方差服从 Heston 模型,且考虑了风险资产(股票)所得的红利收入。通过随机控制原理,在指数效用函数情形下获得 DC 型养老金最优投资的显式解,从而得出其最优投资策略为:红利率越大,相同的养老金财富水平在股票上的投资比例越大;在一定范围内,通胀波动率的增加使得投资者追加对股票的投资,但当通胀波动率较大时,投资者反而减少对股票的投资。

关键词:红利;随机波动;最优投资;Heston 模型;指数效用

中图分类号:0211.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2017)02-0071-04

养老金的投资因其投资期限较长而面临各种风险。常见的 2 种养老金计划即确定缴费型计划和确定给付型计划中,承诺未来固定给付的确定给付型养老金,面临的偿付风险和缴费风险越来越大,而确定缴费型养老金计划因将投资风险转移给投保人,而越来越受到关注。

Haberman^[1-3]等学者对确定缴费型养老金投资所面临的费用风险进行了研究;Battocchio^[4-6]等学者针对养老金投资中所面临的背景风险进行了研究;林祥等^[7]研究了风险资产价格服从 Heston 模型时,指数效用函数下的确定缴费型养老金的最优投资组合问题;张初兵等^[8]进一步拓展了文献[7]的模型,考虑了幂效用函数下确定缴费型养老金的最优投资组合问题。除此之外,赵小艳等^[9]研究了支付红利的最优投资消费模型,但没有考虑养老金的投资问题;石学芹等^[10]等研究了红利支付情形下的 DC 型养老金的最优投资管理问题。

本文在文献[7]的基础上对现有模型作了进一步推广,并考虑红利支付,使得模型更加切合实际。

1 模型框架

假设养老金计划持有者的投资期限为 $[0, T]$,此时金融市场有 2 种资产可供投资:一种是无风险资产如银行存款,一种是风险资产如股票。在 t 时刻无风险资产价格满足下面的微分方程

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{1}$$

式中 r 是无风险利率。

在 t 时刻风险资产价格满足

$$dS(t) = S(t) [(r + \lambda V(t))dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t)] \tag{2}$$

式中: $\lambda > 0$, 为常数; $V(t)$ 为风险资产的方差。

假设风险资产的方差和收益均是随机的,且服从 Heston 模型,则

$$dV(t) = a(\theta - V(t))dt + \delta \sqrt{V(t)}dW_2(t) \tag{3}$$

式中: a, θ, δ 均是正常数,满足 $2a\theta > \delta^2$; $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是标准的一维布朗运动,且 $dW_1(t) \cdot dW_2(t) = \rho dt$ (ρ 是风险资产价格和方差的相关系数);对所有的 $t \in [0, T], V(t) > 0$ 。

收稿日期:2016-09-28

基金项目:国家自然科学基金项目(61503001);安徽工程大学金融工程研发中心开放基金立项(JRGCKF201501)

作者简介:孙惠玲(1980—),女,陕西咸阳人,讲师,硕士,主要研究方向为金融数学与金融工程。

在上述模型框架下考虑确定缴费型养老金计划。假设缴费率是常数 c , 工资单位是 1, 投资者在单位时间内每货币单位投资在风险资产上所得的红利收入记为 b , t 时刻养老金的财富价值为 $X(t)$, t 时刻养老金财富投资到风险资产的比例为 $\pi(t)$, 则 t 时刻养老金财富投资到无风险资产的比例为 $1 - \pi(t)$ 。 t 时刻养老金财富过程

$$\begin{aligned} dX(t) = & [X(t)(r + b\pi(t) + \lambda\pi(t)V(t)) + c]dt + \\ & X(t)\pi(t)\sqrt{V(t)}dW_1(t) \quad (4) \\ X(0) = & x_0 \end{aligned}$$

2 最优化问题的解

在上述模型框架下, 养老金计划投资者希望寻找一个最优投资策略 $\pi^*(t)$, 使得财富效用函数达到最大化, 即

$$\sup_{\pi_t} E[u(X_T)] \quad (5)$$

效用函数 $u(\cdot)$ 是严格凹函数, 满足 $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$, 类似文献[7]。现考虑指数效用函数 (CARA), 即

$$u(x) = -\frac{1}{q}e^{-qx}$$

式中 q 指的是绝对风险厌恶系数, 且 $q > 0$ 。

定义值函数为

$$\begin{aligned} H(t, x, v) = & \sup_{\pi_t} E(u(X_T) | X(t) = x, V(t) = v), \\ & 0 < t < T \quad (6) \end{aligned}$$

根据动态规划原理得到值函数的 HJB 方程

$$\sup_{\pi_t} \left\{ H_t + [x(r + b\pi_t + \lambda\pi_t v) + c]H_x + \frac{1}{2}\pi_t^2 x^2 v H_{xx} + \right. \\ \left. \rho\delta x\pi_t v H_{xv} + a(\theta - v)H_v + \frac{1}{2}\delta^2 v H_{vv} \right\} = 0 \quad (7)$$

其中边界条件为 $H(T, x, v) = -\frac{1}{q}e^{-qx}$ 。

根据一阶条件可以得到

$$\pi_t^* = -\frac{(b + \lambda v)H_x}{xvH_{xx}} - \frac{\rho\delta H_{xv}}{xH_{xx}} \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式, 可得

$$\begin{aligned} H_t + rxH_x + cH_x - \frac{1}{2}\frac{(b + \lambda v)^2 H_x^2}{vH_{xx}} - \\ \frac{\rho\delta(b + \lambda v)H_x H_{xv}}{H_{xx}} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2 \delta^2 v H_{xv}^2}{H_{xx}} + \\ a(\theta - v)H_v + \frac{1}{2}\delta^2 v H_{vv} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

假设值函数有如下形式

$$\begin{aligned} H(t, x, v) = & -\frac{1}{q}\exp\{-q[A(t)(x - B(t)) + g(t)v]\} \\ & (10) \end{aligned}$$

边界条件为: $A(T) = 1, B(T) = 0, g(T) = 0$ 。因此有值函数的偏导数

$$\begin{aligned} H_t = & -q[A_t(x - B(t)) - B_t A(t) + g_t v]H, \\ H_x = & -qA(t)H, \\ H_{xx} = & q^2 A^2(t)H, \\ H_v = & -qg(t)H, \\ H_{xv} = & q^2 A(t)g(t)H, \\ H_{vv} = & q^2 g^2(t)H \end{aligned}$$

式中: A_t, B_t, g_t 分别指 $A(t), B(t), g(t)$ 对 t 的一阶导数。

将上述偏导数代入(9)式, 可以得到

$$\begin{aligned} (A_t + rA(t))x + \\ \left(c - \frac{A_t B}{A(t)} - B_t + \frac{a\theta g(t)}{A(t)}\right)A(t) + \\ g_t v + \frac{1}{2}\frac{(b + \lambda v)^2}{vq} - \rho\delta(b + \lambda v)g(t) - \\ avg(t) - \frac{1}{2}\delta^2 v q g^2(t)(1 - \rho^2) = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

用分离了常微分方程的方法解(11)式, 得到下面 3 个常微分方程

$$\begin{aligned} A_t + rA(t) = 0, A(T) = 1 \quad (12) \\ c - \frac{A_t B(t)}{A(t)} - B_t + \frac{a\theta g(t)}{A(t)} = 0, B(T) = 0 \\ (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_t v + \frac{1}{2}\frac{(b + \lambda v)^2}{vq} - \\ \rho\delta(b + \lambda v)g(t) - avg(t) - \\ \frac{1}{2}\delta^2 v q (1 - \rho^2)g^2(t) = 0 \\ g(T) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

其中(12)式可以解得

$$A(t) = \exp(r(T - t)) \quad (15)$$

$B(t)$ 和 $g(t)$ 分别满足(13)和(14)式。

由上述讨论可以得到下面的定理。

定理 2.1 在考虑股票支付红利情形下, 对于 DC 型养老金投资风险资产 (股票) 的最优投资比例为

$$\pi_t^* = \frac{b + \lambda v}{xvqA(t)} - \frac{\rho\delta g(t)}{xA(t)} \quad (16)$$

式中: $A(t)$ 满足(15)式, $B(t)$ 和 $g(t)$ 分别满

足(13)和(14)式。

定理 2.2 若不考虑股票支付红利情况,则对于 DC 型养老金的最优投资策略 π_i^* 与文献[7]中所得结果相同。

3 数值分析

为了进一步说明红利率和通胀波动率对养老金最优投资策略的影响,在给定的参数下利用 Matlab 软件进行模拟分析。

3.1 给定参数下红利率对最优投资策略的影响

给定参数如下:

$$\begin{aligned} r &= 0.05, T-t = 15, c = 0.25, \alpha = 0.2, \\ \theta &= 0.18, v = 0.15, \lambda = 1, q = 0.08, \\ \delta &= 0.07, X = 5 \end{aligned}$$

此时,红利率对最优投资策略的影响如图 1 所示。由图 1 可知,无论相关系数 p 取值为正还是负,随着红利率的增长,投资者都会加大对风险资产如股票的投资比例。当相关系数为正时,红利率的增大引起投资者大幅度增加对股票的投资比例;而相关系数为负时,投资者持谨慎态度,红利率的增大只能使投资者稍微追加一点对股票的投资。

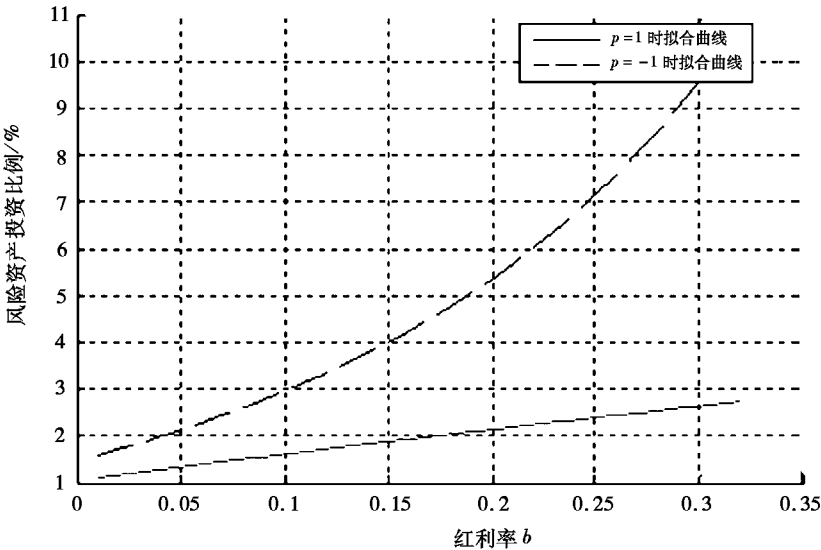


图 1 相关系数为正负两种取值情况下红利率对最优投资策略的影响

Fig. 1 The Influence of the Dividend Rate on the Optimal Investment Strategy under the condition that the correlation coefficient is positive and negative values

3.2 给定参数下通胀波动率对最优投资策略的影响

给定参数如下:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, q = 0.08, \lambda = 1, v = 0.15, \alpha = 0.2, \\ T-t &= 15, r = 0.05, X = 5, b = 0.05 \end{aligned}$$

此时通胀波动率对最优投资策略的影响如图 2 所示。由图 2 可知,在其他参数确定的情况下,随着通胀波动率的增加,投资者对股票的投资策略是先缓慢增加;当通胀波动率达到 0.1 之后,再大幅追加投资;当通胀波动率超过 0.3 时,金融市场波动较大,投资者处于谨慎状态,将减少对股票

的投资。

4 结论

基于文献[7],进一步考虑股票支付红利的情形,并在指数效用函数下给出了 DC 型养老金最优投资的显式解。从最优投资策略可以看出:红利率越大,相同的养老金财富水平在股票上的投资比例越大;在一定范围内,通胀波动率的增加使得投资者追加对股票的投资,当通胀波动率较大时,投资者反而会减少对股票的投资,这与现实中养老金的投资管理内容相符。

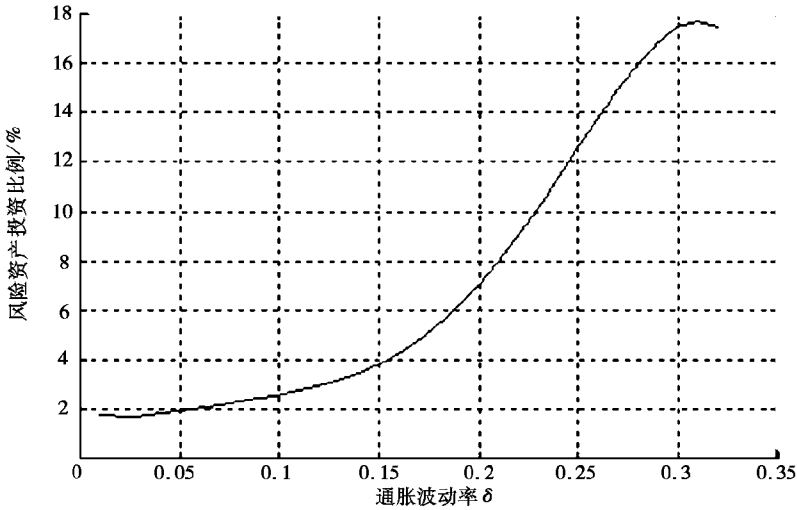


图 2 其他参数确定的情况下通胀波动率对最优投资策略的影响
Fig. 2 The Influence of the Dividend Rate on the Optimal Investment Strategy under the condition that other parameters are identified

参考文献:

[1] HABERMAN S, VIGNA E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes[J]. Insurance;Mathematics and Economics,2002,31(1):35-69.

[2] BOOTH P, YAKOUBOV Y. Investment policy for defined-contribution pension scheme members close to retirement: An analysis of the lifestyle concept[J]. North American Actuarial Journal,2000,4(2):1-19.

[3] DEELSTRA G, GRASSELLI M, KOEHL P F. Optimal design of the guarantee for defined contribution funds[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004,28(11):2 239-2 260.

[4] BATTOCCHIO P, MENONCIN F. Optimal pension management in a stochastic framework[J]. Insurance;Mathematics and Economics, 2004,34(1):79-95.

[5] 卞世博,刘海龙. 背景风险下 DC 型养老金的最优投资策略:基于 Legendre 转换对偶解法[J]. 管理工程学报, 2013,27(3):145-149.

[6] 王力平,张元萍. 考虑死亡率的 DC 型养老金资产配置研究的统一框架[J]. 保险研究,2014(4):121-127.

[7] 林祥,杨益非. Heston 随机方差模型下确定缴费型养老金的最优投资[J]. 应用数学,2010,23(2):413-418.

[8] 张初兵,荣喜民,侯如靖,等. Heston 模型下确定缴费型养老金的投资组合优化[J]. 系统工程,2012,30(12):39-44.

[9] 赵小艳,段启宏. 支付红利的最优投资消费模型研究[J]. 工程数学学报,2011,28(1):139-142.

[10] 石学芹,费为银,李娟,等. 带最低保障和红利的养老金随机控制问题研究[J]. 数学理论与应用,2011,31(3):85-93.

Research on Optimal Investment of Contribution Pension by Dividend Payment and Inflation Fluctuation

SUN Huiling¹, WANG Chuanyu²

(1. Anhui Institute of Information Technology, Wuhu Anhui 241000, China;
2. College of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu Anhui 241000, China)

Abstract: This paper mainly studies the optimal investment problem for contribution pension problem by dividend payments and stochastic volatility. Suppose there are two types of assets in the financial markets, which is risk-free (deposit in bank) and risk assets (stock), and the fund of pension plan in both assets. The variance of risk assets obeys Heston model and takes the dividend income about risk assets (stock) into account. Through the stochastic control theory, we get the explicit expressions for the optional investment under the exponential utility function. And the optimal investment strategy is as follows: the greater the dividend rate, the greater the proportion of the same pension wealth in the stock investment. Within a certain range, the increase in inflation volatility makes investors invest more in stocks. But when inflation volatility fluctuates, investors reduce investment in stocks.

Keywords: dividend; stochastic volatility; optimal investment; heston model; exponential utility (责任编辑:李华云)