

三阶 Erlang 分布参数的 Bayes 估计及检验

季海波

(宿迁学院 文理学院,江苏 宿迁 223800)

摘要:首先给出了三阶 Erlang 分布在定数截尾场合下参数的极大似然估计;其次给出了在“平均剩余寿命”下的三阶 Erlang 分布参数的拟矩估计;然后再利用共轭先验分布得到了参数的经验 Bayes 估计、区间估计和假设检验;最后通过模拟得到一组随机样本并给出了不同截尾样本下参数的点估计和区间估计。

关键词:三阶 Erlang 分布;极大似然估计;拟矩估计;经验 Bayes 估计;区间估计

中图分类号:O212.62 文献标识码:A 文章编号:1671-5322(2018)04-0073-04

k 阶 Erlang 分布是排队论中常用的一个重要的服务时间分布,它与指数分布有密切联系。若 $X_1, X_2, \dots, X_k$ 是一列独立的随机变量,且都服从指数分布 $E(\mu)$, 则随机变量 $T = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ 具有概率密度

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\mu^k (\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}, & t > 0, \mu > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

称 T 服从参数为 μ 的 k 阶 Erlang 分布^[1], k 是正整数。

特别地,当 $k = 3$ 时三阶 Erlang 分布的密度函数和分布函数分别为

$$f(t, \mu) = \frac{27}{2} \mu^3 t^2 e^{-3\mu t}$$
$$F(t, \mu) = 1 - (1 + 3\mu t + \frac{9}{2} \mu^2 t^2) e^{-3\mu t}$$

$t > 0, \mu > 0$

若令 $\theta = 3\mu$, 则三阶 Erlang 分布的密度函数和分布函数分别记为

$$f(t, \theta) = \frac{1}{2} \theta^3 t^2 e^{-\theta t} \tag{1}$$

$$F(t, \theta) = 1 - (1 + \theta t + \frac{1}{2} \theta^2 t^2) e^{-\theta t} \tag{2}$$

其中 $t > 0, \theta > 0$ 。

文献[2]在定数截尾样本下研究了参数的极

大似然估计,文献[3]研究了“平均剩余寿命”这一概念下的拟矩估计,文献[4-5]给出了一些分布的 Bayes 估计,而关于 Erlang 分布的参数的 Bayes 估计尚未见到,而且阶数越高估计越复杂。本文研究在定数截尾场合下三阶 Erlang 分布参数的极大似然估计、拟矩估计、经验 Bayes 估计、Bayes 区间估计和假设检验。

1 定数截尾场合下参数 θ 的极大似然估计

设 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)} (r \leq n)$ 为容量为 n 的三阶 Erlang 分布随机样本中前 r 个最小观察值(为了记号方便,将 $t_{(i)}$ 的下标中括号省略,下文统一用 t_i 表示第 i 个最小观察值,当 $r = n$ 时为全样本的情形)。由文献[2],若令 $t = (t_1, t_2, \dots, t_r)$, 则样本 t 的似然函数为

$$L(t|\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(t_i, \theta) \right] \bar{F}^{n-r}(t_r, \theta) \tag{3}$$

将式(1)、式(2)代入式(3),有

$$L(t|\theta) = A \theta^{3r} (1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2)^{n-r} e^{-B\theta} \tag{4}$$

其中

$$A = \frac{n! (\prod_{i=1}^r t_i)^2}{(n-r)! 2^r}, \quad B = \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r$$

对式(4)取对数,得对数似然函数为

$$\ln L(t|\theta) = \ln A + 3r \ln \theta +$$

$$(n-r) \ln (1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2) - B \theta$$

令

$$\frac{d \ln L(t|\theta)}{d \theta} = \frac{3r}{\theta} + \frac{(n-r)t_r(\theta t_r + 1)}{1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2} - B = 0$$

整理得

$$B t_r^2 \theta^3 + P t_r \theta^2 + Q \theta - 6r = 0 \tag{5}$$

其中

$$P = 2 \sum_{i=1}^r t_i - 3rt_r, \quad Q = 2 \sum_{i=1}^r t_i - 6rt_r$$

由卡尔丹公式

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{3QB - P^2}{3B^2 t_r^2},$$

$$q = \frac{d}{a} + \frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} = \frac{-162rt_r B^2 + P^3 - 9BPQ}{27B^3 t_r^3}$$

经计算,其判别式 $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, 方程

(5)有一个实根和两个共轭复根,故其极大似然估计为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{MLE} = & \\ & \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned} \tag{6}$$

2 参数 θ 的拟矩估计

设产品的寿命 $T \sim F(t)$, 在产品工作到时刻 t_0 仍能正常工作的条件下,它还能继续正常工作的平均时间,我们称之为该产品在时刻 t_0 的平均剩余寿命,记为 $M_T(t_0)$ 。

由文献[3]知

$$M_T(t_0) = \frac{1}{R(t_0)} [\mu - \int_0^{t_0} R(x) dx]$$

其中 $\mu = E(T)$, $R(t) = 1 - F(t)$

若在本文中引入此概念,则 $M_T(t_0)$ 表示排队论受服务者在时刻 t_0 的平均剩余服务时间,且

$E(T) = \frac{3}{\theta}$, 则有

$$M_T(t_0) = \frac{e^{\theta t_0}}{1 + \theta t_0 + \frac{1}{2} \theta^2 t_0^2} \left[\frac{3}{\theta} - \int_0^{t_0} e^{-\theta x} (1 + \theta x + \frac{1}{2} \theta^2 x^2) dx \right]$$

$$\frac{1}{2} \theta^2 x^2) dx] = \frac{6 + 4\theta t_0 + \theta^2 t_0^2}{\theta(2 + 2\theta t_0 + \theta^2 t_0^2)}$$

在 t_r 时刻,剩下的 $n-r$ 个受服务者中每个受服务者的平均剩余服务时间为 $M_T(t_r)$, 则 $t_r + M_T(t_r)$ 就是 t_r 处每个受服务者的期望服务时间,故 $\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)[t_r + M_T(t_r)]$ 是 n 个受服务者的期望服务时间总和。

由拟矩估计的基本思想,总体均值用样本均值来估计,建立如下方程:

$$E(T) = \frac{1}{n} \{ \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)[t_r + M_T(t_r)] \}$$

即

$$\frac{3}{\theta} = \frac{1}{n} \{ \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)[t_r + \frac{6 + 4\theta t_r + \theta^2 t_r^2}{\theta(2 + 2\theta t_r + \theta^2 t_r^2)}] \}$$

整理得

$$B t_r^2 \theta^3 + P t_r \theta^2 + Q \theta - 6r = 0$$

该方程与式(5)一样,故所求的拟矩估计

$$\hat{\theta} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{7}$$

$$\text{其中 } p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = \frac{3QB - P^2}{3B^2 t_r^2},$$

$$q = \frac{d}{a} + \frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} = \frac{-162rt_r B^2 + P^3 - 9BPQ}{27B^3 t_r^3}$$

3 参数 θ 的经验 Bayes (EB) 估计

可取参数 θ 的共轭先验分布,其先验密度函数为

$$\pi(\theta) = \lambda \theta^3 e^{-\lambda \theta}, \quad \theta > 0 \tag{8}$$

其中 $\lambda > 0$, 为超参数。

将式(4)、式(8)代入下式可得 θ 的后验密度函数

$$\begin{aligned} \pi(\theta|t) &= \frac{L(t|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty} L(t|\theta)\pi(\theta) d\theta} = \\ &= \frac{\theta^{3r+3} e^{-(B+\lambda)\theta} (1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2)^{n-r}}{\int_0^{+\infty} \theta^{3r+3} e^{-(B+\lambda)\theta} (1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2)^{n-r} d\theta} \\ \text{又 } (1 + \theta t_r + \frac{1}{2} \theta^2 t_r^2)^{n-r} &= \sum_{i=0}^{n-r} C_{n-r}^i \sum_{j=0}^i \frac{C_j^i}{2^j} \theta^{i+j} t_r^{i+j} \end{aligned}$$

则可得 θ 的后验密度函数为

$$\pi(\theta|t) = C^{-1} \sum_{i=0}^{n-r} C_{n-r}^i \sum_{j=0}^i \frac{C_j^i}{2^j} \theta^{3r+i+j+3} t_r^{i+j} e^{-(B+\lambda)\theta} \tag{9}$$

其中

$$C=\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\frac{\Gamma(3r+i+j+4)}{(B+\lambda)^{3r+i+j+4}},$$

$\Gamma(\cdot)$ 是伽玛函数。

在平方损失下, θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_B=\int_0^{+\infty}\theta\pi(\theta|t)\mathrm{d}\theta=$$

$$\begin{aligned} C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\int_0^{+\infty}\theta^{3r+i+j+4}\mathrm{e}^{-(B+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta=\\ C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\frac{\Gamma(3r+i+j+5)}{(B+\lambda)^{3r+i+j+5}}\end{aligned}\quad(10)$$

下面用极大似然法来估计超参数 λ , 其密度函数及其分布为

$$f(t,\lambda)=\int_0^{+\infty}f(t,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{360\lambda t^2}{(\lambda+t)^7}\quad(11)$$

$$\bar{F}(t,\lambda)=\int_t^{+\infty}f(x,\lambda)\mathrm{d}x=\frac{6\lambda(\lambda^2+6\lambda t+15t^2)}{(\lambda+t)^6}\quad(12)$$

将式(11)、式(12)代入到式(3)可得

$$\begin{aligned} L(t|\lambda)=\\ \frac{r!}{(n-r)!}\Big[\prod_{i=1}^r\frac{360\lambda t_i^2}{(\lambda+t_i)^7}\Big]\Big[\frac{6\lambda(\lambda^2+6\lambda t_r+15t_r^2)}{(\lambda+t_r)^6}\Big]^{n-r}\end{aligned}$$

取对数有

$$\begin{aligned} \ln L(t|\lambda)=\\ \ln\frac{r!}{(n-r)!}+\sum_{i=1}^r[\ln\lambda+\ln360t_i^2-7\ln(\lambda+t_i)]+\\ (n-r)[\ln6\lambda+\ln(\lambda^2+6\lambda t_r+15t_r^2)-6\ln(\lambda+t_r)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令}\frac{\mathrm{d}\ln L(t|\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\sum_{i=1}^r\Big(\frac{1}{\lambda}-\frac{7}{\lambda+t_i}\Big)+(n-r)\Big(\frac{1}{\lambda}+\frac{2\lambda+6t_r}{\lambda^2+6t_r\lambda+15t_r^2}-\frac{6}{\lambda+t_r}\Big)=0\end{aligned}$$

可得

$$\frac{n}{\lambda}+\frac{(n-r)(2\lambda+6t_r)}{\lambda^2+6t_r\lambda+15t_r^2}=\sum_{i=1}^r\frac{7}{\lambda+t_i}+\frac{6(n-r)}{\lambda+t_r}\quad(13)$$

$$\text{令}h_1(\lambda)=\frac{n}{\lambda}+\frac{(n-r)(2\lambda+6t_r)}{\lambda^2+6t_r\lambda+15t_r^2},$$

$$h_2(\lambda)=\sum_{i=1}^r\frac{7}{\lambda+t_i}+\frac{6(n-r)}{\lambda+t_r}$$

显然有 $h_1(\lambda)>0, h_2(\lambda)>0$, 且当 $\lambda\rightarrow0^+$ 时, 有 $h_1(\lambda)>h_2(\lambda)$

又

$$h_1'(\lambda)=-\frac{n}{\lambda^2}-\frac{2(n-r)(\lambda^2+6t_r\lambda+3t_r^2)}{(\lambda^2+6t_r\lambda+15t_r^2)^2}<0$$

$$h_1''(\lambda)=-\frac{2n}{\lambda^3}-\frac{4(n-r)(\lambda+3t_r)(\lambda-3t_r)^2}{(\lambda^2+6t_r\lambda+15t_r^2)^3}>0$$

$$h_2'(\lambda)=-\sum_{i=1}^r\frac{7}{(\lambda+t_i)^2}-\frac{6(n-r)}{(\lambda+t_r)^2}<0$$

$$h_2''(\lambda)=\sum_{i=1}^r\frac{14}{(\lambda+t_i)^3}+\frac{12(n-r)}{(\lambda+t_r)^3}>0$$

故 $h_1(\lambda), h_2(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是严格递减的下凸函数。

而且

$$\lim_{\lambda\rightarrow+\infty}\frac{h_1(\lambda)}{h_2(\lambda)}=\frac{2n-r}{6n+r}<1$$

故在区间 $(0, +\infty)$ 内方程(12)有唯一解, 迭代公式为

$$\begin{aligned} \lambda^{(m+1)}=\\ \frac{n}{\sum_{i=1}^r\frac{7}{\lambda^{(m)}+t_i}+\frac{6(n-r)}{\lambda^{(m)}+t_r}-\frac{(n-r)(2\lambda^{(m)}+6t_r)}{(\lambda^{(m)})^2+6t_r\lambda^{(m)}+15t_r^2}}\end{aligned}\quad(14)$$

假设该迭代公式最终的迭代值记做 $\hat{\lambda}$, 将 $\hat{\lambda}$ 代入式(9)可得 θ 的 EB 估计 $\hat{\theta}_{\text{EB}}$ 。

4 参数 θ 的 Bayes 区间估计及假设检验

定理 若 θ 的后验密度由式(9)给出, 给定 t 和概率 $1-\alpha(0<\alpha<1)$, 则 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayes 置信区间为 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_R]$ 。其中 $\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_R$ 满足

$$C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\int_0^{\hat{\theta}_L}\theta^{3r+i+j+3}\mathrm{e}^{-(B+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha}{2}$$

$$C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\int_{\hat{\theta}_L}^{+\infty}\theta^{3r+i+j+3}\mathrm{e}^{-(B+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\alpha}{2}$$

证明:

$$1-\alpha=$$

$$1-C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\int_0^{\hat{\theta}_L}\theta^{3r+i+j+3}\mathrm{e}^{-(B+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta-$$

$$C^{-1}\sum_{i=0}^{n-r}C_{n-r}^i\sum_{j=0}^i\frac{C_{i-r}^jt_r^{i+j}}{2^jt_r}\int_{\hat{\theta}_R}^{+\infty}\theta^{3r+i+j+3}\mathrm{e}^{-(B+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_{\hat{\theta}_L}^{\hat{\theta}_R}\pi(\theta|t)\mathrm{d}\theta=P(\hat{\theta}_L\leq\theta\leq\hat{\theta}_R)$$

对于如下假设检验问题:

$$(1)\text{原假设}H_0:\theta\leq\theta_0.$$

(2)备择假设 $H_1:\theta > \theta_0$ 。

由 θ 的后验密度式(9)计算出两个假设的后验概率分别为

$$p_0 = P(\theta \leq \theta_0), p_1 = P(\theta > \theta_0)$$

当 $\frac{p_0}{p_1} > 1$ 时,接受 H_0 ; 当 $\frac{p_0}{p_1} < 1$ 时,接受 H_1 ; 当 $\frac{p_0}{p_1} \approx 1$ 时,需要进一步抽样。

5 实例分析

例:取样本容量 $n = 30$, 参数真值 $\theta = 2$, 通过 MATLAB 中的 slicesample 函数产生如下一组

服从三阶 Erlang 分布的随机样本: 2. 061 7, 2. 481 4, 1. 992 3, 1. 715 4, 1. 023 9, 2. 112 8, 0. 692 2, 3. 696 2, 4. 484 4, 2. 812 6, 2. 293 3, 4. 461 2, 0. 212 2, 1. 103 3, 0. 833 8, 0. 926 3, 0. 999 7, 1. 811 3, 4. 996 4, 2. 806 7, 1. 966 4, 1. 574 2, 1. 307 1, 1. 066 9, 0. 797 5, 1. 877 3, 1. 155 5, 0. 935 0, 1. 747 0, 0. 532 4。

对以上数据,用 MATLAB 软件进行统计分析可以得到参数估计及检验如表 1。

由表 1 数据可见,随着取不同定数的截尾样本越多,参数的估计越靠近真实值,而且本文方法所得的 Bayes 估计与极大似然估计几乎一致,说明该方法是切实可行的。

表 1 参数的估计及检验($\alpha = 0. 05$)

Table 1 The estimation and testing of parameter θ ($\alpha = 0. 05$)

r	$\hat{\theta}_{MLE}$	$\hat{\theta}_{EB}$	$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_R]$	$H_0:\theta \leq \hat{\theta}_{EB}, H_1:\theta > \hat{\theta}_{EB}$
30	1. 982 1	1. 990 1	[1. 232 4, 2. 473 6]	接受原假设
25	1. 872 4	1. 893 2	[1. 201 3, 2. 494 6]	接受原假设
20	1. 732 1	1. 753 3	[1. 195 3, 2. 574 3]	接受原假设
15	1. 502 5	1. 541 4	[1. 123 7, 2. 647 2]	接受原假设

参考文献:

[1] 胡运权. 运筹学基础及应用[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,2004.

[2] 顾蓓青,王蓉华,徐晓岭. 艾拉姆咖分布的统计分析[C]//2011 年全国机械行业可靠性技术学会暨第 4 届可靠性工程分会第 3 次全体委员大会论文集,2011:65-67.

[3] 倪中新,费鹤良. 威布尔分布无失效数据的统计分析[J]. 应用数学学报,2003,26(3):533-543.

[4] 龙兵. 艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计及检验[J]. 数学的实践与认识,2013,43(7):104-109.

[5] 汤银才,侯道燕. 三参数 Weibull 分布参数的 Bayes 估计[J]. 系统科学与数学,2009,29(1):109-115.

Bayes Estimation and Testing of Third Order Erlang Distribution Parameters

Ji Haibo

(School of Liberal and Science, Suqian College, Suqian Jiangsu 223800, China)

Abstract: Firstly, the maximum likelihood estimation of the parameters of the third – order Erlang distribution in the case of fixed number truncation is given. Secondly, the quasi – moment estimation of the third-order Erlang distribution parameters under the condition of "average residual life" is given. Then the empirical Bayes estimation, interval estimation and hypothesis test of parameters are obtained by using conjugate prior distribution. Finally, a group of random samples is obtained by simulation, and point and interval estimates of parameters under different truncated samples are given.

Keywords: third-order Erlang distribution; maximum likelihood estimation; quasi – moment estimation; empirical Bayes estimation; interval estimation

(责任编辑:张英健)