doi:10.16018/j.cnki.cn32-1650/n.201901007

有限时间稳定的球杆控制系统设计

黄　星,何标涛,王　涛,王建晖
(广州大学 机械与电气工程学院,广东 广州　510006)

摘要:针对目前球杆系统控制存在不能在短时间内稳定与抗扰动性能差的问题,提出一种有限时间稳定控制方法,用于提高系统的控制性能。通过对球杆系统的结构分析,建立了相应的数学模型,设计了有限时间稳定控制器;运用 Lyapunov 稳定性理论和齐次性理论对设计的系统进行有限时间稳定性分析;最后通过仿真实验对有限时间稳定控制器与 PID 控制器的控制效果进行比较。仿真结果表明:有限时间稳定控制器较 PID 控制在超调量和调节时间等指标方面更加优异,表明所设计的控制方法能让球杆系统有限时间内稳定,同时提升了系统的抗扰动性能。

关键词:球杆系统;抗扰动;有限时间稳定;快速性
中图分类号:TP273　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2019)01-0037-06

球杆系统是高校控制实验室常见的设备,是安全性较高的开环系统,通常用来检验控制方法的效果,是经典控制方法与现代控制方法的理想研究对象[1-4]。近几年来,很多学者对球杆系统作了大量的研究,并从不同的角度提出了控制器的设计方法,主要有 PID 控制、滑模变结构控制和模糊控制等。其中 PID 控制器以其结构简单、对模型误差具有鲁棒性以及易于操作等特点,得到了广泛的应用。

在广泛的实际应用中,发现上述方法存在局限性,主要表现在系统难以实现有限时间稳定,且对强干扰过程难以实现稳定控制,从而无法实现对系统的高精度控制,甚至导致控制系统崩溃。而工业系统中,有限时间稳定性能和抗扰动性能无疑是十分重要的,因此针对有限时间稳定和抗扰动性能的研究是非常具有实际意义的工作。

本文首先对球杆系统进行数学建模和分析,设计出有限时间稳定控制器,然后通过仿真实验验证有限时间稳定控制方法的扰动性能,最后与 PID 控制进行对比分析,验证有限时间稳定控制方法的有效性和可行性。

1　球杆系统的建模与分析

球杆系统的机械部分主要由钢制支架、底座、小球、平衡杆、带轮、电机等部分组成[5],其闭环控制结构图如图 1 所示。

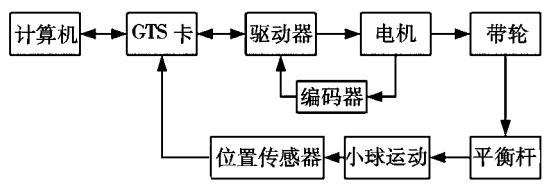

图 1　球杆系统闭环控制结构图

Fig. 1　Closed-loop control structure of the Ball&beam system

图 1 中,实时控制电机的转动使带轮转动,带轮再带动机械结构运动,从而控制小球在导轨上运动[6]。具体地说,基于让小球在导轨上稳定运行的目的,对直流伺服电机的转速与方向进行控制以实现对带轮转动的控制,从而带动机械结构控制导轨的倾斜程度,进而达到对小球稳定运行的精准控制。

收稿日期:2018-03-10
基金项目:国家自然科学基金项目(51775122);广东省重大科技计划项目(2016B090912007);2017 年广州大学创新项目(CX2017059);2018 年广州大学创新项目(CX2018051)
作者简介:黄星(1997—),男,广东揭阳人,主要研究方向为智能控制系统设计。
通信作者:王建晖(1984—),男,湖南湘乡人,实验师,博士,主要研究方向为非线性控制、信号处理和机器人控制。

球杆系统运动示意图如图 2 所示。通常直流伺服电机所带的增量式码盘可以测量电机的实际转动位置,而小球的实际位置则是通过导轨上的电阻传感器测量,并进行相应的转换计算得出。图 2 中,电机的转动带动带轮转动 θ 角度,带轮又带动连杆运动,使得导轨产生 α 角度的偏转,从而导致小球在导轨上滚动。

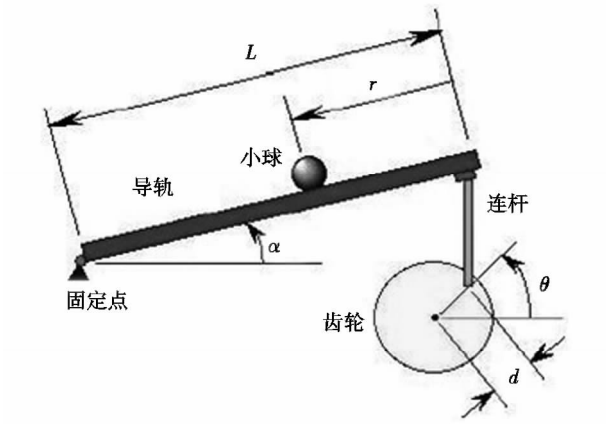

图 2 球杆系统运动示意图

Fig. 2 Motion diagram of the Ball&beam system

图 2 中,连杆与带轮连接处的中心点与带轮中心点的距离记为 d ,mm;连杆与带轮连接处的中心点与带轮几何中心点的连线与水平线的夹角记为 θ ,(°),在系统运行过程中 θ 的大小有一定的范围限制;连杆与导轨的连接点与导轨固定点之间的距离记为 L ,mm。在忽略一些部件构成因素的情况下,利用经典力学理论建立球杆系统的运动学方程,近似得出导轨的倾斜角度 α 与带轮转角 θ 间关系如下:

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta \tag{1}$$

因此,通过控制带轮上齿轮的转角 θ ,可以实现对小球位置的控制。球杆系统控制器的设计原理就是通过控制直流伺服电机达到对带轮转角 θ 的精确调整,实现对小球位置的精确控制[7]。

对球杆系统进行动力学分析,得出小球运动与其自身重力、惯量、导轨的转角 α 、自身的位移 r 之间的关系如下:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mg\sin\alpha - m\dot{r}\dot{\alpha}^2 = 0 \tag{2}$$

式中:重力加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$;小球质量 $m = 0.11\ \mathrm{kg}$;小球的半径为 R ,mm;小球的转动惯量 $J = \frac{2}{5}mR^2$,小球在导轨上的位移为 r ,mm;齿轮半径 $d = 45\ \mathrm{mm}$,连杆与导轨的连接点与导轨固定点之间的距离 $L = 170\ \mathrm{mm}$ 。

由于所建模型不需要很精确,且 α 的期望在 0 附近,故在 0 附近对 α 进行线性化,得

$$\sin\alpha \approx \alpha,\quad \dot{\alpha} \approx 0 \tag{3}$$

因此,方程(2)可以近似简化为:

$$\ddot{r} = \left(\frac{mg}{\frac{J}{R^2} + m}\right)\alpha \tag{4}$$

将式(1)带入式(4),可得

$$\ddot{r} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)}\theta = \frac{gd \times 5}{L \times 7}\theta = 1.853\theta \tag{5}$$

式中,小球在导轨上的实际位移 r 是系统的实际输出量,带轮转动角度 θ 是控制的输入量[8-10]。

2 有限时间稳定控制器设计

2.1 系统状态方程描述

根据式(5),定义如下变量:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

式中:$y_1 = r^* - r$, r^* 为小球在导轨上的期望稳定位移;$y_2 = -\dot{r}$ 。

由上述定义可得

$$\dot{y}_2 = -\ddot{r} = -1.853\theta \tag{6}$$

设 $\theta = -\frac{1}{1.853}u$,由式(6)可以得到

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \tag{7}$$

因此,控制器可以设计为:

$$u = -k_1 \mathrm{sign} y_1 \ |y_1|^{\alpha_1} - k_2 \mathrm{sign} y_2 \ |y_2|^{\alpha_2} \tag{8}$$

式中:$k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha_2 < 1, \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{2 - \alpha_2}$.

2.2 系统的稳定性分析

球杆系统要具有有限时间内稳定的特性和鲁棒性的要求。现对有限时间内球杆系统稳定性进行证明,过程如下:

选择 Lyapunov 函数如下:

$$V(y_1, y_2) = \frac{k_1}{1 + \alpha_1}|y_1|^{1+\alpha_1} + \frac{1}{2}y_2^2 \tag{9}$$

对式(9)的 Lyapunov 函数求导,可得

$$\dot{V}(y_1,y_2) = k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1}\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 = k_1\mathrm{sign}(y_1\ |y_1|^{\alpha_1}y_2 + y_2(-k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1} - k_2\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2}) = -k_2\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2}y_2 = -k_2\ |y_2|^{1+\alpha_2} \tag{10}$$

由此证明了函数 $V(y_1,y_2)$ 是正定的,同样证明了函数 $\dot{V}(y_1,y_2)$ 是半正定的。根据不变性原理,得出 $\dot{V}(y_1,y_2)$ 是趋于零的,相当于 $\dot{y}_2(t)$ 也趋于零。

式(7)证明了 $\dot{y}_1,\dot{y}_2$ 是有界的。由于 $\dot{y}_1,\dot{y}_2$ 满足 Lipschitz 条件,故 $\dot{y}_1,\dot{y}_2$ 都是连续的。对 y_1y_2 函数求导,得

$$\frac{\mathrm{d}(y_1y_2)}{\mathrm{d}t} = y_2^2 - k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1} - k_2\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2} \tag{11}$$

令

$$g_1(t) = -k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1}y_1 = -k_1\ |y_1|^{1+\alpha_1}$$

$$g_2(t) = y_2^2 - k_2y_1\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2} \tag{12}$$

由此证明了 $\dot{g}_1(t)$ 是有界的,故 $g_1(t)$ 是一致连续的。由 $y_2(t)$ 趋于零可知 $g_1(t)$ 趋于零,因此,根据不变性原理可以得出 $g_1(t)$ 趋向于零时,$y_1(t)$ 一定也趋向于零,故闭环系统是全局渐进稳定的。

根据齐次系统定义,系统的向量场满足

$$f(\varphi^{\lambda_1}y_1,\varphi^{\lambda_2}y_2) = \begin{pmatrix} \varphi^{\lambda_2}y_2 \\ -k_1\varphi^{\lambda_1\alpha_1}\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1} - k_2\varphi^{\lambda_2\alpha_2}\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{\lambda_1+l} & 0 \\ 0 & \varphi^{\lambda_2+l} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ -k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1} - k_2\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{\lambda_1+l}f_1(y_1,y_2) \\ \varphi^{\lambda_2+l}f_2(y_1,y_2) \end{pmatrix} \tag{13}$$

由此可得

$$\begin{cases} \lambda_1 + l = \lambda_2 \\ \lambda_2 + l = \lambda_1\cdot\alpha_1 = \lambda_2\cdot\alpha_2 \end{cases} \tag{14}$$

令 $\lambda_1 = 1,\lambda_2 = \dfrac{1+\alpha_2}{2},0 < \alpha_2 < 1,\alpha_1 = \dfrac{\alpha_2}{2-\alpha_2}$. 使式(14)成立,此时系统的齐次度 $l = \dfrac{\alpha_1 - 1}{2} < 0$,是负齐次度,由此可知系统全局是有限时间稳定的。

3　仿真结果与分析

3.1　球杆系统有限时间稳定控制模型仿真搭建

球杆系统模型可以描述如式(5)所示,即

$$\ddot{r} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2}+m\right)}\theta = \frac{gd\times 5}{L\times 7}\theta = 1.853\theta$$

对球杆系统模型分析后可得式(8)形式的有限时间控制器,即

$$u = -k_1\mathrm{sign}y_1\ |y_1|^{\alpha_1} - k_2\mathrm{sign}y_2\ |y_2|^{\alpha_2}$$

式中:$y_1 = r^* - r$,$y_2 = -\dot{r}$,$k_1 > 0,k_2 > 0$,$0 < \alpha_2 < 1,\alpha_1 = \dfrac{\alpha_2}{2-\alpha_2}$.

在 Simulink 中使用相应模块并调整参数搭建球杆系统仿真模型,如图 3 所示。

3.2　传统 PID 控制与有限时间稳定控制的对比分析

3.2.1　未加扰动分析

对图 3 的模型运行后得到传统的 PID 控制与有限时间稳定控制的响应曲线对比,如图 4 所示。

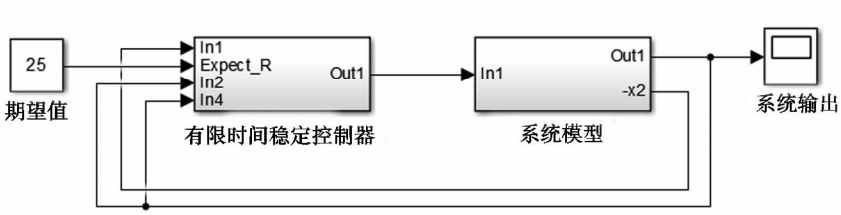

图 3　未加入扰动时有限时间稳定控制的 Simulink 仿真图

Fig. 3　Simulink simulation diagram of undisturbance finite time stability control

对图 4 的响应曲线作误差分析,得到图 5 所示的误差分析曲线。

分析图 4、图 5 可知:传统 PID 控制与有限时间稳定控制相比,有限时间稳定控制几乎没有超调量,且能够让系统在更短的时间内稳定,控制误差范围更小,符合对于有限时间稳定控制优势的理论分析。

3.2.2 加扰动分析

对已搭建好的模型稳定运行 300 s 后加入扰动 $d(t) = 20\sin t + 20\cos t$。加入扰动后,有限时间稳定控制和 PID 控制在 Simulink 上的仿真模型分别如图 6、图 7 所示。

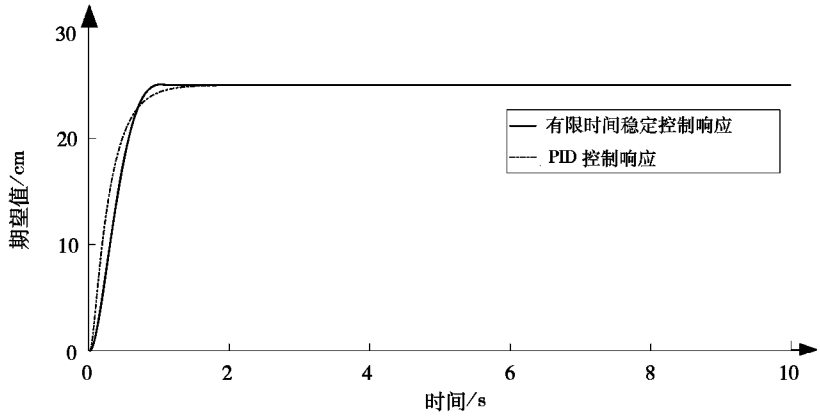

图 4 未加入扰动的响应曲线

Fig. 4 Undisturbance response curve graph

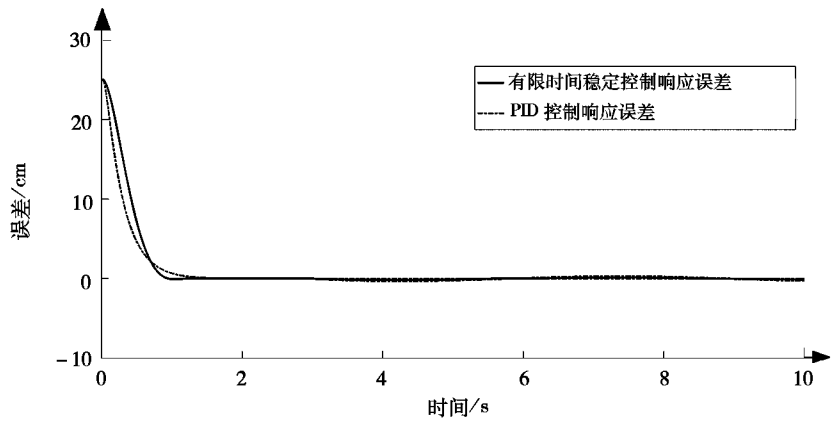

图 5 未加入扰动的误差曲线

Fig. 5 Undisturbance response error curve graph

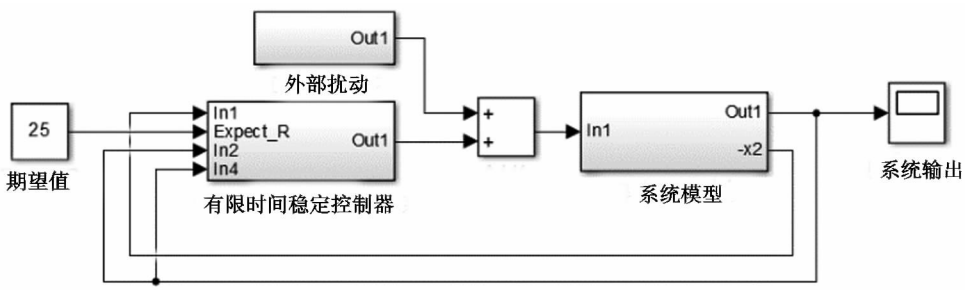

图 6 加入扰动后有限时间稳定控制的 Simulink 仿真图

Fig. 6 Simulink simulation diagram of add disturbance finite time stability control

运行后得到传统的 PID 控制与有限时间稳定控制的响应对比曲线如图 8 所示。

对图 8 的响应曲线作误差分析,得到图 9 所示的误差分析曲线。

由图 8、图 9 可以看出:加入扰动后,PID 控制系统出现轻微的振动,其振动变化幅度比有限时

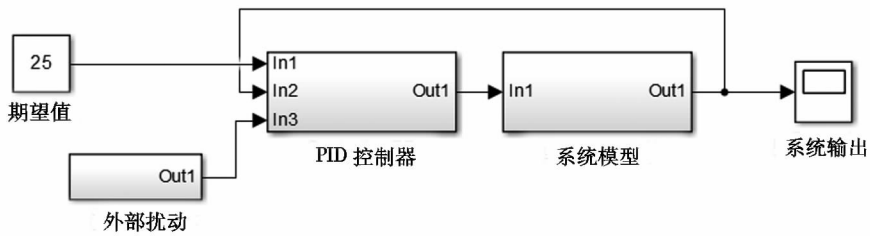

图 7　加入扰动后 PID 控制的 Simulink 仿真图

Fig. 7　Simulink simulation diagram of add disturbance PD control

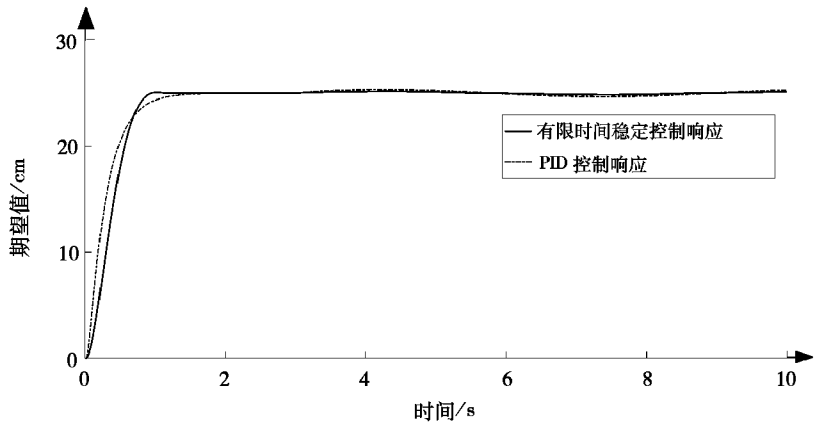

图 8　加入扰动响应曲线

Fig. 8　Add disturbance response curve graph

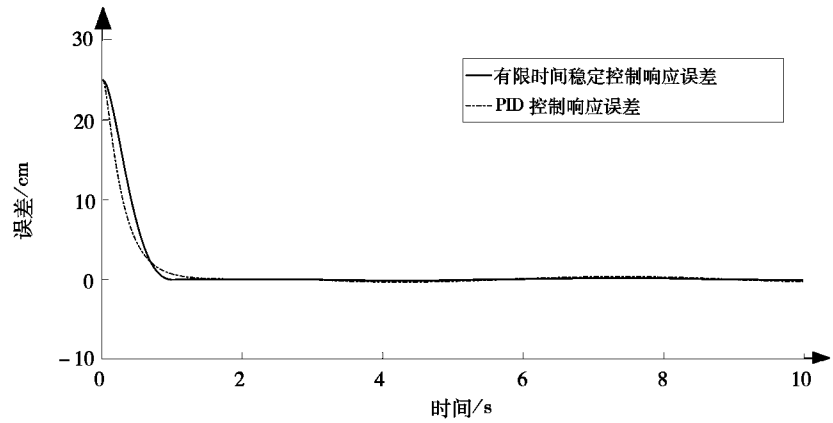

图 9　加入扰动误差曲线

Fig. 9　Add disturbance response error curve graph

间稳定控制的更大,即有限时间稳定控制方法具有更强的抗干扰能力,符合有限时间稳定控制方法优势的理论分析。

4　结论

针对现有球杆系统控制方法在有限时间稳定和抗干扰能力上的不足,提出一种有限时间稳定控制的方法。基于已有的球杆系统的动力学分析,建立球杆系统的简化数学模型;结合相应的控制理论,设计出有限时间稳定控制器;最后通过仿真实验,对有限时间稳定控制和 PID 控制在加入扰动前后的仿真结果进行对比分析。实验结果表明,有限时间稳定控制方法能够让系统在更短的时间内稳定,同时提高了系统的抗干扰能力。因此,有限时间稳定控制方法在球杆系统上表现出的优异控制性能,能够满足现代工业系统在短时间内稳定且具有较强抗干扰能力的需求,即对有限时间稳定控制方法的研究具有非常重要的现实意义。

参考文献:

[1] 吴偏偏,王富东,王敬驰. 球杆控制系统的设计[J]. 自动化技术与应用,2015,34(9):114-116.
[2] 田芳,许弟建,董超群,等. 以智能控制实验室为基础的球杆控制系统设计[J]. 科学中国人,2017(23):62.
[3] 宋志伟,翟文鹏,信建峰,等. 基于 PID 算法的球杆教学系统设计[J]. 硅谷,2015,8(3):5-6.
[4] 魏中原. 基于反馈线性化的球杆系统滑模变结构控制算法研究[D]. 沈阳:东北大学,2011.
[5] 郝洋洋. 球杆系统设计及控制实现[D]. 沈阳:沈阳工业大学,2017.
[6] 傅彩芬. 球杆系统的自抗扰控制[J]. 自动化与仪器仪表,2015(7):79-81.
[7] 白继洲,张井岗. 球杆系统的内模 PID 控制[J]. 太原科技大学学报,2013,34(3):166-170.
[8] 刘阳,万隆君,徐轶群. 浅谈球杆系统的建模与仿真[J]. 中国科技信息,2014(8):159-161.
[9] 王晓勤,韩亚军. 基于根轨迹控制的球杆系统[J]. 重庆文理学院学报:自然科学版,2011,30(3):27-29.
[10] 原伟. 基于 Lyapunov 函数球杆系统的设计[J]. 科技资讯,2011(16):64-65.

Design of Ball&beam Control System with Finite Time Stability

HUANG Xing, HE Biaotao, WANG Tao, WANG Jianhui
(School of Mechanical and Electric Engineering, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong 510006, China)

Abstract: Aiming at the problem that the control of ball&beam system can not be stable in a short time and has poor anti – disturbance performance, a finite-time stability control method is proposed to improve the control performance of the system. Based on the structural analysis of the ball&beam system, the corresponding mathematical model is established and the finite-time stability controller is designed. Lyapunov stability theory and homogeneity theory were used to analyze the stability of the designed system in finite time. Finally, the control effects of finite-time stability controller and PID controller are compared through simulation experiments. The simulation results show that the finite-time stability controller is better than the PID control in terms of overshoot and adjustment time. It shows that the designed control method can stabilize the ball&beam system in finite time and improve the anti-disturbance performance of the system.

Keywords: ball&beam system; anti-disturbance; finite-time stability; speedability

(责任编辑:李华云)