

# 基于响应面法的基坑支护结构稳定可靠度分析

廖 瑛, 樊伯旺

(苏州科技大学 土木工程学院, 江苏 苏州 215011)

**摘要:** 保证基坑支护结构的稳定性是基坑工程设计与施工中的重要课题, 在基坑支护结构的设计中常采用的安全系数法是未考虑到设计参数的随机性与变异性的定值设计法, 而将结构可靠度理论引入到基坑工程中来, 则可以定量地考虑工程中实际存在的不确定性因素, 因而能够对结构的可靠性作出更为客观和合理的判断。针对一重力式基坑支护工程实例, 采用响应面法计算了3种基坑稳定性验算模式的可靠指标及失稳概率, 并与一次二阶矩法的计算结果进行了对比分析; 在此基础上研究了土体参数, 即变异系数、均值和相关系数等对稳定可靠指标的影响, 从中总结了相关有益的结论。

**关键词:** 基坑支护; 稳定性; 可靠度; 响应面法

**中图分类号:** TU43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1671-5322(2019)02-0060-06

基坑工程是一项理论与实践相结合的岩土工程, 也是一项风险大、难度大、投资高的基础性工程。为了确保基坑工程在施工过程中的稳定并将周围土体的变形控制在一定范围内, 在场地受限的开挖范围内必须要对坑壁进行有效的支护和加固, 因而基坑支护结构的稳定性研究是一项重要的课题。目前, 基坑支护结构稳定性与变形的验算方法主要采用定值的安全系数法<sup>[1]</sup>, 即将抗力效应与荷载效应的比值作为安全系数来衡量结构的安全程度。由于这种方法将土体视作均匀介质, 没有考虑到如土体抗剪强度指标、地下水埋深、土层厚度及重度等都是随时空变化的、都不可避免地具有随机性和变异性等不确定性特点, 因而安全系数法并不能客观、合理地反应基坑支护结构实际的安全程度。而基于概率论与数理统计的结构可靠度理论充分考虑了计算参数的不确定性特点, 可以采用响应面法、一次二阶矩法、蒙特卡罗法、优化算法等方法计算结构的可靠指标及失效概率, 利用概率定量地度量结构的可靠性<sup>[2-6]</sup>, 较之于安全系数法可以做到更加科学、全面地对工程结构的可靠性作出判断。

## 1 响应面法

当基本随机变量对系统的响应不能建立明确的表达式反应它们之间的映射关系时, 就需要利用响应面法拟合一个响应面来模拟实际问题的功能函数。响应面函数的建立是响应面法的关键, 它应在描述真实情况的前提下做到尽可能的简单, 在结构可靠度分析时一般常取为二次多项式形式:

$$Z = g(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 \quad (1)$$

式中,  $X_i$  为基本随机变量;  $a, b_i, c_i$  为  $(2n+1)$  个待定系数。该方法的计算步骤为:

(1) 假设初始迭代点  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ , 一般取基本变量的均值  $\mu_X$ 。

(2) 通过数值方法计算功能函数值  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  以及  $g(X_1, X_2, \dots, X_i \pm f\sigma_i, \dots, X_n)$ , 其中系数因子  $f$  在第一步迭代中取为3, 之后取为1。

(3) 解线性方程组得到  $2n+1$  个待定系数, 从而确定拟合的响应面函数。

(4) 用一次二阶矩法求得验算点  $X^*$  及可靠度指标  $\beta(k)$ 。

(5)将可靠指标  $\beta(k)$  与上一次得到的可靠指标  $\beta(k-1)$  的差值取绝对值并控制在给定的精度范围之内,若精度不满足,则通过式(2)插值得到新的迭代点  $X$ ,重新计算第 2~第 5 步,直至满足精度要求为止。

$$X = \mu_X + \frac{g(\mu_X)}{(g(\mu_X) - g(X^*))}(X^* - \mu_X) \quad (2)$$

## 2 基坑支护结构的稳定性验算模式

### 2.1 基坑支护结构抗倾覆稳定可靠度分析

悬臂式挡土桩、墙、单支撑式挡土墙及土钉支护往往需要做抗倾覆稳定性验算。当基坑开挖后,土体的一侧临空,基坑土体不能依靠自身材料的抗剪强度维持稳定,有向临空面倾覆的趋势。悬臂式基坑支护结构依靠坑底以下的嵌固深度,利用悬臂部分阻止临空土体向基坑方向的倾覆,承受了墙后的主动土压力。墙前被动土压力对转动点的抗倾覆力矩和墙后主动土压力对转动点的倾覆力矩构成了抗倾覆稳定性计算的功能函数:

$$g(R, S) = M_R - M_S \quad (3)$$

式中: $M_R$  为抗倾覆力矩,  $\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ ;  $M_S$  为倾覆力矩,  $\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$ 。

对于悬臂式基坑支护结构,转动点取在墙脚处;对单(多)支点式支护结构,转动点取在最下道支撑处。对于重力式基坑支护结构和土钉墙,还应考虑墙体自重对转动点的抗倾覆力矩。

### 2.2 基坑支护结构抗坑底隆起稳定可靠度分析

基坑抗坑底隆起稳定可靠度分析,在此采用同时考虑土黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  作用的抗隆起验算法。其抗隆起失稳的功能函数为:

$$g = \gamma DN_q + cN_c - [\gamma(H + D) + q] \quad (4)$$

式中: $\gamma$  为桩底土重度,  $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  $c$  为桩底土黏聚力,  $\text{kPa}$ ;  $D$  为支护结构嵌固深度,  $\text{m}$ ;  $H$  为基坑开挖深度,  $\text{m}$ ;  $q$  为地面超载,  $\text{kPa}$ ;  $N_q$ 、 $N_c$  为地基承载力系数,可以按照 Prandtl 或者 Terzaghi<sup>[7]</sup> 公式确定,在此选择 Prandtl 公式:

$$N_q = \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) e^{\pi \tan \varphi} \quad (5)$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan \varphi} \quad (6)$$

式中,  $\varphi$  为土的内摩擦角, ( $^\circ$ )。

### 2.3 基坑支护结构抗滑移稳定可靠度分析

按照传统的安全系数法,重力式水泥土桩墙抗滑移稳定性的安全系数可表达为:

$$k = \frac{E_p + (W - \mu_m B) \tan \varphi + cB}{E_a} \quad (7)$$

式中: $E_p$  为被动土压力,  $\text{kN}/\text{m}$ ;  $E_a$  为主动土压力,  $\text{kN}/\text{m}$ ;  $W$  为墙体自重,  $\text{kN}/\text{m}$ ;  $\mu_m$  为水泥土墙底面以上水压力,  $\text{kPa}$  (若水泥土墙在地下水位以上,取  $\mu_m = 0$ ),  $B$  为墙体宽度,  $\text{m}$ 。

故此,根据结构可靠度理论,基坑支护结构抗滑移稳定性分析的功能函数可以取为:

$$g = E_p + (W - \mu_m B) \tan \varphi + cB - E_a \quad (8)$$

## 3 工程实例

### 3.1 工程概述

某基坑<sup>[7]</sup>开挖深度  $H = 3.8 \text{ m}$ ,嵌固深度  $D = 4.2 \text{ m}$ ,地面超载  $q = 20 \text{ kPa}$ ,桩体自重  $\gamma = 19 \text{ kN}/\text{m}^3$ ,桩宽  $1.6 \text{ m}$ 。采用水泥土搅拌桩重力式支护结构,其计算简图及相关土层参数实测表如图 1 及表 1 所示。

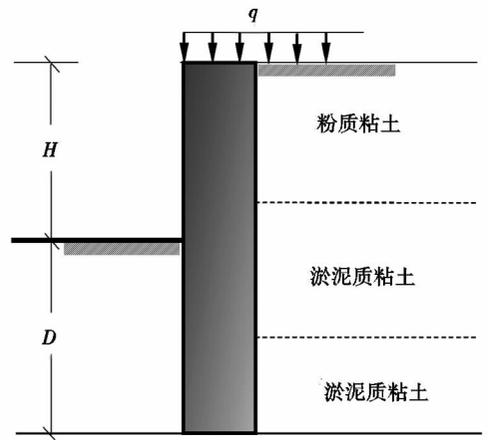


图 1 基坑支护结构计算简图

Fig. 1 The calculation diagram of the foundation pit supporting structure

表 1 相关土层参数实测表

Table 1 The measured table of the related soil layer parameter

土层名称	层厚/ $\text{m}$	重度/ $(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	黏聚力/ $\text{kPa}$	内摩擦角/ $(^\circ)$
粉质黏土	3	17.8	18	16
淤泥质黏土	3	18.2	15	14
淤泥质黏土	2	18.2	13	14

### 3.2 计算假定

鉴于工程实际情况的复杂性,在满足一定计算精度的前提下为简化计算,在可靠度计算中作了如下处理:

(1)对于几何尺寸,比如开挖深度  $H$ 、嵌固深度  $D$  等视作常量;土体参数中,土重度  $\gamma$  的变异性较小,故视土体重度  $\gamma$  为常量,仅将土体黏聚力  $c$ 、内摩擦角  $\varphi$  作为随机变量,并且假定它们均服从正态分布。

(2)对土层各参数均值做加权平均处理以简化可靠度计算过程,至于随机变量的变异系数,鉴于  $c$ 、 $\varphi$  变异系数的取值范围通常在  $0.1 \sim 0.4^{[8]}$ ,本文取  $c$  的变系数为  $0.20$ 、 $\varphi$  的变异系数为  $0.25$ ,加权平均处理后的参数均值及随机变量的变异系数如表 2 所示。

(3)将变量视为独立的随机变量、即不考虑随机变量之间的相关性。

表 2 土层计算参数表

Table 2 Table of soil layer calculation parameter

	黏聚力 $c$ / kPa	内摩擦角 $\varphi$ / ( $^{\circ}$ )	土重度 $\gamma$ / ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )
均值 $\mu$	15.63	14.75	18.05
变异系数 $\delta$	0.20	0.25	—

(4)一般来说,基坑支护工程是临时性工程,不仅需要考虑基坑支护结构的安全性,还应在满足结构预定功能的前提下考虑工程的经济性,尽可能减少不必要的支出和浪费。通常是采用目标可靠指标来平衡可靠性与经济性这一对相矛盾的目标,因而目标可靠指标的确定是一个相当敏感的问题,在岩土工程中还没有统一的规定。根据文献[8],当计算变形时规定目标可靠指标  $\beta_0$  可取  $0.85$ ;当计算地基承载力时规定可靠度  $\beta_0$  可取  $0.95$ ,鉴于此本文建议基坑支护结构稳定性验算的目标可靠指标取  $1.5$ ,相应的目标失稳概率为  $6.68\%$ 。当然在基坑施工中还应充分运用各种现代的方法和手段对施工过程做到实时把控,当发现隐患和危险时更要及时处理以切实保证基坑工程的稳定性。

### 3.3 稳定可靠度计算结果及结果分析

根据响应面法,采用 MATLAB 编程计算该重力式基坑支护结构抗倾覆、抗坑底隆起、抗滑移的可靠指标及失稳概率,相关计算结果列于表 3 中。为便于比较,结构可靠度计算中另一种常用的一次二阶矩法的计算结果也如表 3 中所示。

表 3 稳定可靠性计算结果

Table 3 The calculation results of the stable reliability

稳定性验算模式	抗倾覆		抗坑底隆起		抗滑移	
	响应面法	一次二阶矩法	响应面法	一次二阶矩法	响应面法	一次二阶矩法
迭代次数	4	4	6	7	4	5
可靠指标	1.786 996	1.786 993	3.505 421	3.505 776	2.521 097	2.521 099
失效概率/%	3.696 905	3.696 924	0.022 794	0.022 763	0.584 946	0.584 943
验算点坐标 ( $c/\text{kPa}, \varphi/\text{rad}$ )	(11.465 284, 0.180 702)	(11.459 899, 0.180 827)	(11.440 072, 0.048 973)	(12.579 936, 0.039 197)	(11.081 008, 0.124 887)	(11.071 216, 0.125 030)

由表 3 计算结果可见,响应面法与一次二阶矩法两种计算方法的结果几近相等,在迭代次数上前者等于或少于后者,说明响应面法在重力式基坑支护结构的稳定可靠度计算方面还是比较高效的。由支护结构的 3 种稳定性验算模式的响应面法计算结果可见,抗倾覆模式的可靠指标最小、为  $1.786 996$ ,相应的失效概率最大、为  $3.696 905\%$ ,但相较于目标可靠指标  $1.5$  及目标失稳概率  $6.68\%$ ,该基坑抗倾覆稳定性是符合要求的,此外抗坑底隆起和抗滑移稳定性也都能够满足目标可靠度的要求,说明该重力式基坑支护结构不会发生倾覆、坑底隆起和滑移破坏,这与工程实际情况

是相吻合的。

结构可靠度计算中随机变量参数的变异系数、均值等对结果的影响很大,此外随机变量之间的相关性也会对结果产生影响,故以下对响应面法的计算结果作进一步的探讨以寻找相关规律。

#### 3.3.1 随机变量变异性对可靠度计算结果的影响分析

随机变量变异性对于结构可靠度的计算结果会产生非常大的影响,根据响应面法计算,土体黏聚力  $c$ 、内摩擦角  $\varphi$  变异系数对于 3 种基坑支护结构稳定验算模式可靠指标的影响如图 2 所示。

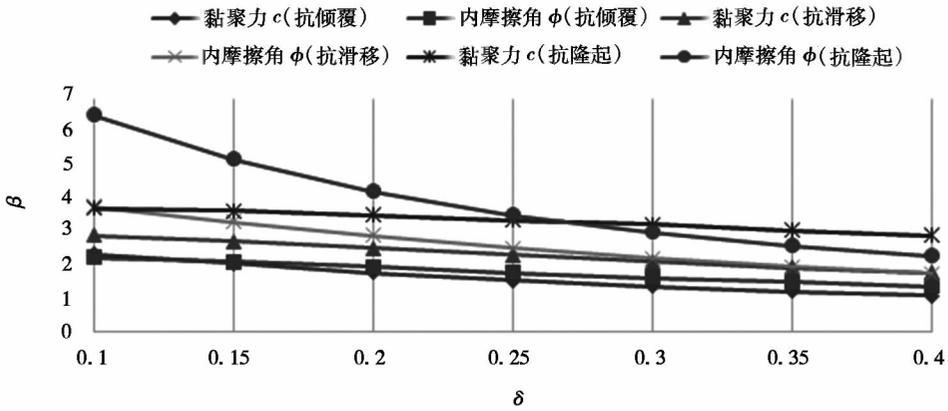


图 2 可靠指标  $\beta$  与变异系数  $\delta$  关系曲线

Fig.2 The relation curve between reliability index  $\beta$  and variation coefficient  $\delta$

由图 2 可见,在该重力式基坑支护结构的 3 种稳定性验算模式中,可靠指标均随着变异系数的增大而减小;在抗倾覆稳定性模式中, $c$ 、 $\varphi$  变异系数对于可靠指标的影响相当;但在抗滑移和抗坑底隆起两种稳定性模式中, $\varphi$  变异系数对于可靠指标的影响明显高于  $c$  变异系数对于可靠指标的影响,这种趋势在抗坑底隆起稳定性计算中更为明显,说明内摩擦角的变异性对于可靠度计算的影响甚大,在确定内摩擦角的变异系数时要谨慎。

### 3.3.2 随机变量均值对可靠度计算结果的影响分析

分别改变随机变量土体黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  的均值,计算三种稳定性验算模式的可靠指标,计算结果如图 3、图 4 所示。

由图 3、4 可见,可靠指标均随着  $c$ 、 $\varphi$  均值的增大而增大,其中可靠指标与  $c$  均值近似呈线性

关系,而可靠指标与  $\varphi$  均值近似呈抛物线关系;此外,在 3 种稳定性验算模式中, $c$  和  $\varphi$  的均值都对抗倾覆可靠指标的影响最大,鉴于前述计算中抗倾覆稳定性的可靠指标最小,随机变量的均值能极大地影响抗倾覆稳定可靠度的计算结果,故在确定随机变量的均值时尤需慎重。

### 3.3.3 随机变量相关性对可靠度计算结果的影响分析

在以上计算中,都是将  $c$ 、 $\varphi$  视为独立的随机变量进行分析,文献[9]指出,土的  $c$ 、 $\varphi$  指标之间存在着较强的负相关性,且相关系数  $\rho$  通常在  $-0.8 \sim -0.6$  变化。在此采用正交变换法<sup>[10]</sup>来处理相关随机变量,经过变换处理后得到独立的随机变量  $c'$ 、 $\varphi'$ ,它们的均值和均方差可按照式(9)计算。

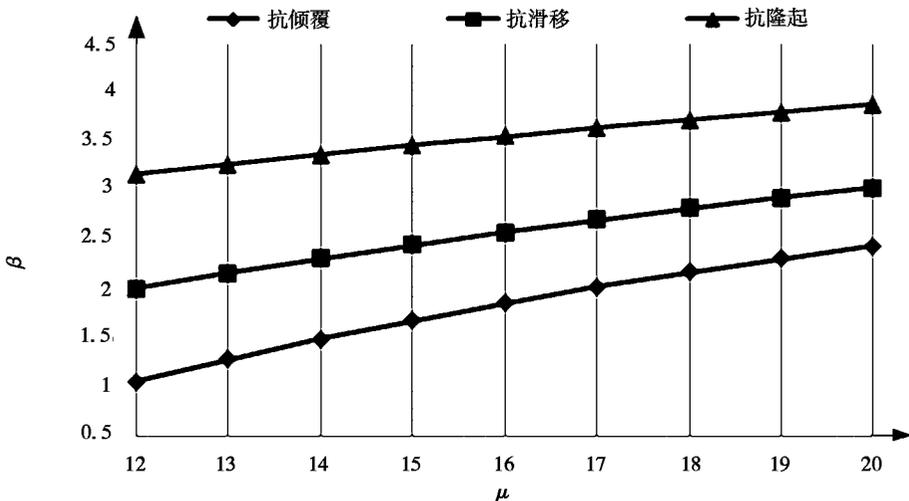


图 3 可靠指标  $\beta$  与  $C$  均值  $\mu$  关系曲线

Fig.3 The relation curve between reliability index  $\beta$  and  $C$ 's mean value

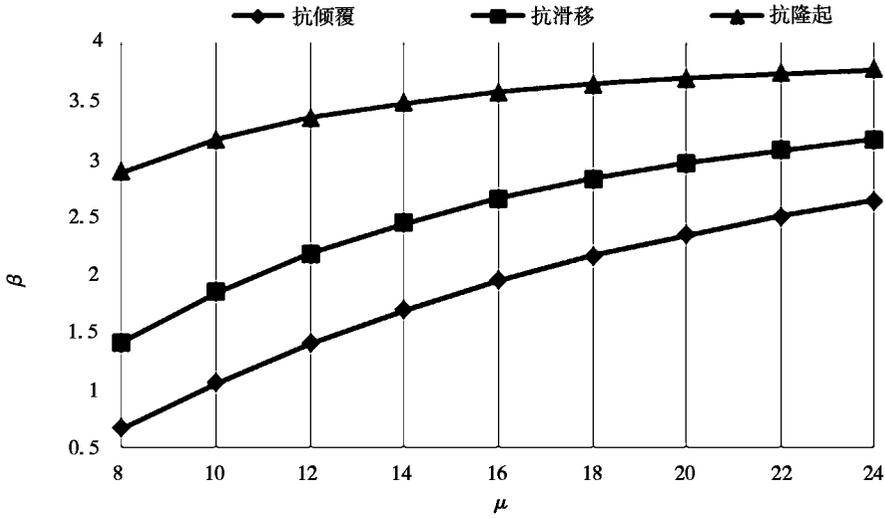


图 4 可靠指标  $\beta$  与  $\varphi$  均值关系曲线

Fig.4 The relation curve between reliability  $\varphi$  index  $\beta$  and  $\varphi$ 's mean value

$$\begin{cases} \mu_{c'} = \mu_c - \frac{\sigma_c}{\sigma_{\tan\varphi}}\rho\mu_{\tan\varphi} \\ \mu_{\varphi'} = \mu_{\varphi} \\ \sigma_{c'} = \sigma_c(1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \\ \sigma_{\varphi'} = \sigma_{\varphi} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \mu_{\tan\varphi} = \tan(\mu_{\varphi}) \\ \sigma_{\tan\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi}}{\cos^2\varphi} \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\mu_c$  和  $\mu_{\varphi}$  为相关随机变量的均值、 $\sigma_c$ 、 $\sigma_{\varphi}$  为相关随机变量的均方差,  $\rho$  为相关系数,  $\sigma_{\tan\varphi}$ 、 $\mu_{\tan\varphi}$  可按式(10)计算。

考虑随机变量的负相关性, 当将相关随机变量作如上处理变换成独立的随机变量  $c'$ 、 $\varphi'$  后, 即可按照前述响应面法计算结构的可靠指标及失稳概率。该重力式基坑支护结构 3 种稳定性验算模式的可靠指标与相关系数的关系曲线如图 5 所示。

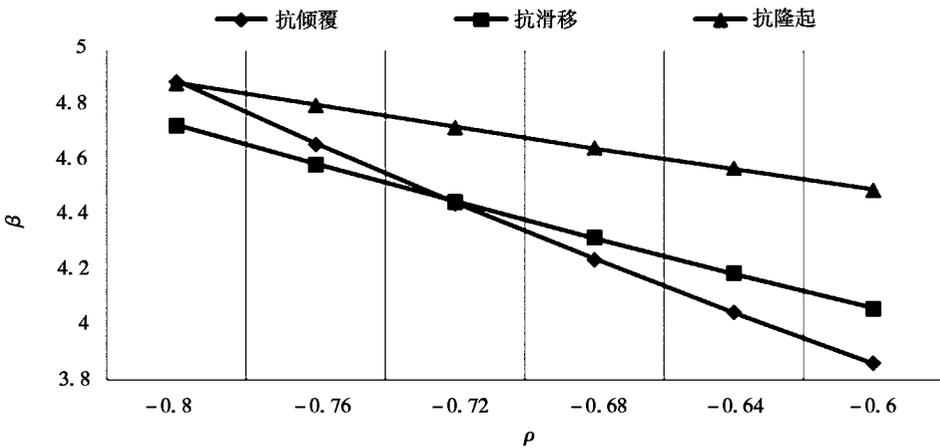


图 5 可靠指标  $\beta$  与相关系数  $\rho$  关系曲线

Fig.5 The relation curve between reliability  $\beta$  index and correlation coefficient  $\rho$

由图 5 可见, 在考虑参数间的相关性后, 3 种稳定性验算模式的可靠指标均明显大于前述不考虑参数间相关性的可靠指标, 即不考虑参数间的相关性是偏于保守和安全的, 由此说明在实际计算中为简化计算过程, 将随机变量视为独立的随

机变量是可行的。此外, 随着相关系数的增大, 可靠指标均呈递减趋势。其中抗倾覆可靠指标受相关系数的影响最大、相关系数对抗滑移可靠指标的影响次之、对抗隆起可靠指标的影响最小。

## 4 结论

本文根据结构可靠度理论,采用响应面法对一重力式基坑支护结构进行了抗倾覆、抗滑移和抗坑底隆起稳定可靠度分析,并与结构可靠度计算中常用的一次二阶矩法的计算结果进行了比较,主要结论如下:

(1)采用响应面法计算基坑支护结构稳定可靠度是可行的,并且相较于一次二阶矩法,响应面法计算过程简单,收敛速度快,计算精度也能得到保证。

(2)在仅将土体黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\varphi$  视作

随机变量时,基坑支护结构的可靠指标均随着  $c$ 、 $\varphi$  变异系数的增大而减小,且  $\varphi$  变异系数对于可靠指标的影响更为显著;随着  $c$ 、 $\varphi$  均值的增大,可靠指标呈递增趋势,其中可靠指标与  $c$  均值近似呈线性规律变化、可靠度指标与  $\varphi$  均值近似呈抛物线型规律变化。

(3)当考虑随机变量之间的负相关性时,可靠指标明显大于不考虑变量之间相关性的可靠指标,并且随着相关系数的增大可靠指标逐渐减小。这说明在计算中将随机变量视作独立的随机变量进行可靠度分析既是简单的也是偏于保守和安全的。

## 参考文献:

- [1] 茜平一,陈晓平.天然地基承载力可靠度研究[J].岩土力学,1999,20(2):41-45.
- [2] 侯晓亮,谭晓慧.改进的一次二阶矩方法在基坑抗隆起稳定可靠度评价中的应用[J].武汉大学学报(工学版),2016,49(5):791-795.
- [3] 万志辉,刘红艳,步艳洁,等.基于 Monte Carlo 法的深基坑支护结构可靠度研究[J].华东交通大学学报,2015,32(1):71-77.
- [4] 谭晓慧,胡晓军,储诚富,等.模糊响应面法及其在边坡稳定可靠度分析中的应用[J].中国科学技术大学学报,2011,41(3):233-247.
- [5] 胡冉,李典庆,周创兵,等.基于随机响应面法的结构可靠度分析[J].工程力学,2010,27(9):192-200.
- [6] 曹净,丁文云,赵党书,等.基于 LS-SVM 响应面法的基坑支护结构优化设计[J].昆明理工大学学报(自然科学版),2014,39(4):43-47.
- [7] 孔德森,吴燕开.基坑支护工程[M].北京:冶金工业出版社,2012.
- [8] 高大钊.地基土力学性质指标的可靠性分析与取值[J].同济大学学报,1985(4):59-68.
- [9] 范明桥,盛金宝.土强度指标  $\varphi$ 、 $c$  的互相关性[J].岩土工程学报,1997,19(4):100-104.
- [10] 黄志全,王安明,毕理毅,等.深基坑支护工程可靠度分析与数值模拟[M].郑州:黄河水利出版社,2009.

# Analysis of Stable Reliability of Foundation Pit Supporting Structure Based on Response Surface Method

LIAO Ying, FAN Bowang

(School of Civil Engineering, Suzhou University of Science & Technology, Suzhou Jiangsu 215011, China)

**Abstract:** Ensuring the stability of foundation pit supporting structure is an important subject in the design and construction of foundation pit engineering. The safety factor method often used in the design of foundation pit support structure is a fixed value design method which does not take into account the randomness and variability of design parameters. By introducing the theory of structural reliability into foundation pit engineering, the uncertainty factors in engineering can be considered quantitatively, and the reliability of the structure can be judged more objectively and reasonably. In view of a gravity foundation pit supporting project, the reliability index and instability probability of three foundation pit stability checking models are calculated by response surface method, and the results are compared with those calculated by first-order second-moment method. On this basis, the influence of soil parameters, such as coefficient of variation, mean value and correlation coefficient, on stability and reliability index is studied, and some useful conclusions are summarized.

**Keywords:** foundation pit supporting; stability; reliability; response surface method

(责任编辑:张英健)