RS 码的分布式编码协作系统方案设计

黄雅云

(南京航空航天大学 电子信息工程学院,江苏 南京 210000)

摘要:为了降低 RS 码分布式编码协作系统的误码率,在深入研究 RS 编译码算法的基础上,提出了合并-智能联合译码算法。该算法在智能译码算法中增加一个合并器,以充分利用 RS_1 和 RS_2 两路信号。仿真实验表明,当误比特率为 10^{-3} 时,与简单联合译码算法相比,采用合并-智能联合译码算法的编码协作系统能获得 3.7 dB 的增益;在使用自适应系数的情况下,合并-智能联合译码算法能够使编码协作系统获得最佳的性能。因此,合并-智能联合译码算法可以有效提高 RS 码编码协作系统的性能。

关键词:RS 码;编码协作;合并-智能联合译码算法

中图分类号:TN929.5

文献标志码:A

文章编号:1671-5322(2020)03-0035-06

1959年,Reed和Solomon提出可以利用有限域中的多项式构造RS码(Reed-Solomon code)^[1]。RS码的基础是循环码,可以用代数方法来构造和分析,因此可以找到多种实用的译码方法,且易于硬件实现。1961年Gorenstein等^[2]发现RS码是BCH码(Bose, Ray-Chaudhuri, Hocquenghem Code)的一种子码,并提出了译码算法,但该算法在纠正大量错误时不够理想;1967年,Berlekamp^[3]提出了Berlekamp-Massey译码算法,使得RS码能够纠正大量随机错误;1975年,Sugiyama等^[4]证明欧几里得算法能够用于译码。现今RS码因具有强大的纠错性能,在无线通信、广播电视以及深空通信中有着广泛的应用^[5]。

目前,RS码编码协作系统中使用的简单联合译码算法或智能联合译码算法,目的节点均不能充分利用获得的两路信号,误码率也不够理想。本文在参考前人文献资料的基础上,提出合并-智能联合译码算法。该算法能够充分利用获得的两路信号,进一步降低信噪比和误码率,提高RS码分布式编码协作系统的性能。

1 相关工作

1.1 信源与中继的相关编码

基于协作通信的三节点经典通信模型^[6],RS

码编码协作场景的方案如图1所示。一个完整的编码协作传输流程,从信源产生信息到目的节点完整地译出信息,需要2个时隙^[7]。在第1个时隙,信源首先将二进制序列 m_1 映射为 $GF(2^m)$ 中符号序列 a_1 ,其中 $2^m = n + 1$, n 是码字长度;然后系统 $RS_1(n, k_1, d_1)$ 编码将符号序列 a_1 编码,其中 k_1 为信息位长度, d_1 为码字最小距离。由RS码的基础理论^[8-9]可知,RS码的码字最小距离 $d_1 = n - k_1 + 1$ 。

RS_1 的生成多项式 $g_1(x)$ 由 $n - k_1$ 个根组成, $g_1(x)$ 多项式可表示为:

$$g_1(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \cdots (x - \alpha^{n-k_1}) = g_0^{(1)} + g_1^{(1)}x + g_2^{(1)}x^2 + \cdots + g_{n-k_1-1}^{(1)}x^{n-k_1-1} + g_{n-k_1}^{(1)}x^{n-k_1} \quad (1)$$

式中: $\alpha^i (1 \leq i \leq n - k_1)$ 是 $g_1(x)$ 的根,且 $\alpha^i \in GF(2^m)$; $g_j^{(1)} (0 \leq j \leq n - k_1)$ 是 $g_1(x)$ 的系数。

RS_1 码可以通过下式产生。

$$b(x) = a(x)g_1(x) \quad (2)$$

式中: $a(x)$ 是待传输信息 a_1 的多项式表达式, $a(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + a_2^{(1)}x^2 + \cdots + a_{k_1-1}^{(1)}x^{k_1-1}$,其中 $a_i^{(1)} \in GF(2^m)$, $0 \leq i \leq k_1 - 1$; $b(x)$ 是码字的多项式表达式, $b(x) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)}x + \cdots + b_{n-1}^{(1)}x^{n-1}$,其

图 1 RS 码的编码协作系统框架结构

Fig 1 Frame structure of RS code coding cooperation system

中 $b_i^{(1)} \in GF(2^m), 0 \leq i \leq n-1$ 。

在编码协作方案中,使用系统 RS 码,其生成多项式可表示为:

$$b_1(x) = x^{n-k_1} a_1(x) + p_1(x) \quad (3)$$

式中: $p_1(x)$ 为校验多项式, $p_1(x) = p_0^{(1)} + p_1^{(1)}x + p_2^{(1)}x^2 + \dots + p_{n-k_1-1}^{(1)}x^{n-k_1-1}$, 其中 $p_i^{(1)} \in GF(2^m), 0 \leq i \leq n-k_1-1$ 。

$p_1(x)$ 可以通过 $GF(2^m)$ 中的多项式除法得到, 计算式如下:

$$p_1(x) = \frac{x^{n-k_1} a_1(x)}{g(x)} \quad (4)$$

因此系统 RS 码的码字多项式 $b_1(x)$ 可以表达为 $b_1 = [b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{N-1}^{(1)}] = [p_1, a_1]$, 其中 p_1 为校验序列, a_1 为信息序列, 且 $p_1 = [p_0^{(1)}, p_1^{(1)}, \dots, p_{n-k_1-1}^{(1)}]$, $a_1 = [a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, a_{k_1-1}^{(1)}]$ 。由此, 可以得到非二进制序列 b_1 。

将得到的序列 b_1 进行调制后得到长度为 $N-1$ 的消息 $x_s = [x_s^0, x_s^1, \dots, x_s^{N-1}]^T$, 其中 $x_s^i (0 \leq i \leq N-1)$ 是调制后的符号; 然后信源将 x_s 同时传输至中继和目的节点。在第 1 个时隙, 中继收到经信道传输的信源信息 x_s , 令其为信息 $r_{s,R}$, 表达式为:

$$r_{s,R} = h_{s,R}^T x_s + n_{s,R} \quad (5)$$

式中: $n_{s,R}$ 是 Gaussian 噪声序列, 且 $n_{s,R} = [n_{s,R}^0, n_{s,R}^1, \dots, n_{s,R}^{N-1}]^T$; $h_{s,R}$ 是瑞利衰落系数, 且 $h_{s,R} = [h_{s,R}^0, h_{s,R}^1, \dots, h_{s,R}^{N-1}]^T$ 。

同样地, 在第 1 个时隙, 目的节点也将收到经信道传播的信息 x_s , 令其为 $r_{s,D}$, 表达式为:

$$r_{s,D} = h_{s,D}^T x_s + n_{s,D} \quad (6)$$

式中: $n_{s,D}$ 是 Gaussian 噪声序列, 且 $n_{s,D} = [n_{s,D}^0, n_{s,D}^1, \dots, n_{s,D}^{N-1}]^T$; $h_{s,D}$ 是瑞利衰落系数, 且 $h_{s,D} = [h_{s,D}^0, h_{s,D}^1, \dots, h_{s,D}^{N-1}]^T$ 。

在第 2 个时隙, 中继首先解调收到的信息 $r_{s,R}$ 以获得信息 $\tilde{b}_1$; 然后通过 RS_1 的译码器使用 Berlekamp-Massey 译码算法得到 $\hat{a}_1$ ^[10-11]; 最后再对序列 $\hat{a}_1$ 进行 RS_2 编码。 RS_2 码是码率为 k_2/n 、码长为 n 、信息位长度为 k_2 、码字最小距离 $d_2 = n - k_2 + 1$ 的系统 (n, k_2, d_2) RS 码。 RS_2 码的生成多项式 $g_2(x)$ 有 $n - k_2$ 个根, $g_2(x)$ 表达式可表示为:

$$g_2(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2) \dots (x - \alpha^{n-k_2}) = g_0^{(2)} + g_1^{(2)}x + g_2^{(2)}x^2 + \dots + g_{n-k_2-1}^{(2)}x^{n-k_2-1} + g_{n-k_2}^{(2)}x^{n-k_2} \quad (7)$$

式中: $\alpha^j \in GF(2^m)$ 是 $g_2(x)$ 的根, $g_j^{(2)} \in GF(2^m)$ 是 $g_2(x)$ 的系数, 且 $0 \leq j \leq n - k_2$ 。

由于 $k_1 > k_2$, $g_2(x)$ 比 $g_1(x)$ 有更多的根, 所以 RS_2 的纠错能力比 RS_1 的高。系统 RS_2 码可以表示为:

$$b_2(x) = x^{n-k_2} a_2(x) + p_2(x) \quad (8)$$

式中: $b_2(x)$ 是中继处编码器得到的码字多项式, $b_2(x) = b_0^{(2)} + b_1^{(2)}x + b_2^{(2)}x^2 + \dots + b_{n-1}^{(2)}x^{n-1}$, 其中 $b_{i_2}^{(2)} \in GF(2^m), 0 \leq i_2 \leq n-1$; $a_2(x)$ 是中继处编码器的输入信息多项式, $a_2(x) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + a_2^{(2)}x^2 + \dots + a_{k_2-1}^{(2)}x^{k_2-1}$, 其中 $a_{f_2}^{(2)} \in GF(2^m), 0 \leq f_2 \leq k_2 - 1$, 可化简为 $a_2 = [a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{k_2-1}^{(2)}]$ 。

在此系统中, 中继从信号

$$\hat{a}_1 = [\hat{a}_0^{(1)}, \hat{a}_1^{(1)}, \hat{a}_2^{(1)}, \dots, \hat{a}_{k_1-1}^{(1)}]$$

中选择前 k_2 个符号作为信息 a_2 。同样地,可以得到校验多项式 $p_2(x)$, 计算式如下:

$$p_2(x) = \frac{x^{n-k_2}a_2(x)}{g_2(x)} \quad (9)$$

式中: $p_2(x) = p_0^{(2)} + p_1^{(2)}x + p_2^{(2)}x^2 + \dots + p_{n-k_2-1}^{(2)} \cdot x^{n-k_2-1}$, 其中 $p_i^{(2)} \in \text{GF}(2^m)$, $0 \leq i \leq n - k_2 - 1$ 。

因此 $p_2 = [p_0^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_{n-k_2-1}^{(2)}]$, 系统 RS_2 码的码字多项式 $b_2(x)$ 可以表达为 $b_2 = [b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{N-1}^{(2)}] = [p_2, a_2]$ 。由此,可以得到非二进制序列 b_2 ; 然后对序列 b_2 进行调制, 得到序列 x_R , 并传输至目的节点。

在第2个时隙,目的节点收到中继传输的信息 $r_{R,D}$, 可表示为:

$$r_{R,D} = h_{R,D}^T x_R + n_{R,D} \quad (10)$$

式中: $h_{R,D}$ 是瑞利衰落系数, $n_{R,D}$ 是 高斯白噪声序列。

目的节点收到消息 $r_{S,D}$ 和 $r_{R,D}$ 后, 首先对其分别进行解调, 得到序列 $\hat{b}_1$ 和 $\hat{b}_2$; 然后再对得到的这两个序列进行联合译码, 估计输入序列。

1.2 目的节点联合译码算法

联合译码是编码协作系统的关键特征之一, 常用的联合译码算法有简单联合译码算法和智能联合译码算法。

1.2.1 简单联合译码算法

简单联合译码算法的原理如图2所示。图2中, RS 编码协作系统的简单联合译码器在时隙1收到输入信息 $\hat{b}_1$ 后, 在 RS_1 译码器中使用 Berlekamp-Massey 译码算法进行译码, 得到非二进制序列 $\hat{a}_1$; 在时隙2收到输入信息 $\hat{b}_2$ 后在对应的 RS_2 译码器使用 Berlekamp-Massey 译码算法进行译码, 得到非二进制序列 $\hat{a}_2$; 然后将非二进制序列 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 输入至混合器。由2.1节可知, $\hat{a}_2$ 是 $\hat{a}_1$ 的子序列, 即 $\hat{a}_2$ 是 $\hat{a}_1$ 的前 k_2 个符号。由于 $k_2 < k_1$, RS_2 码的纠错能力比 RS_1 码的大, 由 RS 码的传输特性可知, 在高信噪比条件下, 纠错能力大的码字的误码率比纠错能力小的码字的误码率低, 但在低信噪比条件下, 情况正好相反。因此该算法需要设置信噪比阈值以决定混合器的输出序列, 即当信噪比大于阈值时, 使用 $\hat{a}_2$ 的信息替代 $\hat{a}_1$ 的前 k_2 个符号, 即混合器的输出序列 $\tilde{a}_1 = [\hat{a}_2, \hat{a}_1]$, 其中 $\tilde{a}_1 = [\hat{a}_{k_2}^{(1)}, \hat{a}_{k_2+1}^{(1)}, \dots, \hat{a}_{k_2+(k_1-k_2)-1}^{(1)}]$; 但当信噪比低

图2 简单联合译码算法框架

Fig 2 Framework of simple joint decoding algorithm

于阈值时, $\tilde{a}_1 = \hat{a}_1$ 。最后将混合器的输出序列 $\tilde{a}_1$ 映射为二进制序列 $\tilde{m}_1$ 。

1.2.2 智能联合译码算法

智能联合译码算法的原理如图3所示。首先, 将解调后的序列 $\hat{b}_2$ 在 RS_2 译码器中使用 Berlekamp-Massey 译码算法^[3]进行译码, 得到非二进制序列 $\hat{a}_2$; 由上一节内容可知, 解调后的序列 $\hat{b}_1$ 由非二进制序列 $\hat{a}_1$ 和校验序列 p_1 组成, 即 $\hat{b}_1 = [p_1, \hat{a}_1]$, 因为 $\hat{a}_2$ 是 $\hat{a}_1$ 的子序列, 即 $\hat{a}_2$ 是 $\hat{a}_1$ 的前 k_2 个符号, 因此在混合器中, 使用 $\hat{a}_2$ 替代 $\hat{a}_1$ 的前 k_2 个符号, 这样混合器的输出为 $\bar{b}_1 = [p_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1]$; 由于使用 RS_2 译码器后可以纠正一部分传输导致的错误, 因此 $\bar{b}_1$ 的可靠性比 $\hat{b}_1$ 更高, 在将混合后的信息序列 $\bar{b}_1$ 作为 RS_1 译码器的输入信息后, 使用 Berlekamp-Massey 译码算法进行译码, 得到非二进制序列 $\tilde{a}_1$; 最后将非二进制序列 $\tilde{a}_1$ 映射为二进制序列 $\tilde{m}_1$, 译码结束。

图3 智能联合译码算法原理

Fig 3 Principle of intelligent joint decoding algorithm

1.3 两种联合译码算法的比较

简单联合译码算法的实现方式较为简单, 但

是需要引入信噪比阈值以判断是否使用 $\hat{a}_2$ 的前 k_2 个符号替代 $\hat{a}_1$ 的前 k_2 个符号,且目的节点不能充分利用 RS_1 和 RS_2 这两路信号以降低系统误码率。

在智能联合译码算法中,不需要使用信噪比阈值来判断混合器的使用方式,而是使用 RS_2 译码器的输出作为 RS_1 译码器输入的一部分,因为 RS_2 译码器可以纠正一部分传输错误,所以智能联合译码算法能够提高系统性能。但是在该联合

译码算法中,目的节点仍旧不能充分利用获得的两路信号以降低系统误码率。

2 合并-智能联合译码算法设计

2.1 系统设计

为了目的节点能够充分利用获得的 RS_1 和 RS_2 两路信号,进一步降低系统误码率,提出了合并-智能联合译码算法,其具体框图如图4所示。

图4 合并-智能联合译码算法原理图

Fig 4 Schematic diagram of merge-intelligent joint decoding algorithm

图4中,在目的节点的解调器之前增加一个合并器,将 RS_1 的前 k_2 个调制符号与 RS_2 的 k_2 个信息位的调制符号合并,合并系数参考协作通信中的最大比合并算法^[12]。经过 RS_2 合并器之后,调制序列为

$$r_{R,D} = [p_{R,D}, \alpha \cdot r'_{R,D} + (1 - \alpha) \cdot r'_{S,D}] \quad (11)$$

式中: $\alpha = \sigma_{R-D} / (\sigma_{R-D} + \sigma_{S-D})$,其中 σ_{R-D} 表示中继一目的节点信道的信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR), σ_{S-D} 表示信源一目的节点信道的信噪比; $r'_{R,D}$ 为 RS_2 码中 k_2 个信息位的调制符号; $r'_{S,D}$ 为 RS_1 码中前 k_2 个信息位的调制符号; $p_{R,D}$ 为 RS_2 码中校验位的调制符号。

由此,系统可以充分利用 RS_1 和 RS_2 两路信号,使系统误码率进一步降低。

2.2 实现步骤

为实现上述算法,具体实现步骤如下:

(1)对来自信源的信息 $r_{s,D}$ 进行解调,得到序列 $\hat{b}_1$;

(2)按式(11)将信源信息 $r_{s,D}$ 的前 k_2 个调制符号与中继信息 $r_{r,D}$ 的 k_2 个信息位的调制符号合并,并与中继信息 $r_{r,D}$ 的校验调制符号 $p_{R,D}$ 合并,

得到新序列 $r_{R,D}^{(2)}$;

(3)对新序列 $r_{R,D}^{(2)}$ 进行解调,得到序列 $\hat{b}_2$;

(4)将解调后的序列 $\hat{b}_2$ 在 RS_2 译码器中使用Berlekamp-Massey译码算法进行译码,得到非二进制序列 $\hat{a}_2$;

(5)在混合器中,使用 $\hat{a}_2$ 替代 $\hat{b}_1$ 的前 k_2 个符号,得到混合器的输出 $\overline{b}_1 = [\hat{p}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1]$,其中 $\hat{a}_1 = [\hat{a}_{k_2}^{(1)}, \hat{a}_{k_2+1}^{(1)}, \dots, \hat{a}_{k_2+(k_1-k_2)-1}^{(1)}]$;

(6)将混合后的信息序列 $\overline{b}_1$ 作为 RS_1 译码器的输入信息,使用Berlekamp-Massey译码算法进行译码,得到非二进制序列 $\widetilde{a}_1$;

(7)将非二进制序列 $\widetilde{a}_1$ 映射为二进制序列 $\widetilde{m}_1$,译码结束。

3 系统仿真及性能分析

在系统采用RS码的编码协作方案的基本框架时,分别对简单联合译码算法、智能联合译码算法与合并-智能联合译码算法3种不同的联合译码算法进行仿真实验,仿真条件如下: RS_1 码字为

(63,51,13)RS 码,RS₂ 码字为(63,39,25)RS 码,在 AWGN 信道中传输,使用 64-QAM 调制方式,设置信源—中继信道为理想信道,即 $\sigma_{S-R} = \infty$,且 $\sigma_{R-D} = \sigma_{S-D} + 1$ 。仿真结果如图 5、图 6。图 5、图 6 中横坐标为信源—目的节点信道的信噪比,使用分贝数表示,单位为 dB;纵坐标为误比特率(Bit Error Ratio, BER)。所示。需要注意的是使用合并—智能联合译码算法时,合并系数 α 随信噪比而变化。

图 5 不同联合译码算法的性能比较

Fig 5 Performance comparison between different joint decoding algorithm

图 5 为不同联合译码算法的性能仿真比较。从图 5 可以看出,当误比特率为 10^{-3} 时,与非协作系统(non-coop)相比,使用简单联合译码算法的系统获得的增益只有 0.6 dB,性能有限;使用智能译码算法的系统可以获得 2.2 dB 左右的增益;使用合并—智能译码算法的系统可以获得 3.7 dB 左右的增益。由此可见,使用合并—智能译码算法的系统误比特性能比使用智能译码算法的系统好。在低信噪比条件下,即当信噪比低于 10 dB 时,使用 3 种不同译码算法的系统误比特率性能相近;但当信噪比大于 10 dB 后,使用合并—智能译码算法的系统可以获得较大的性能提升。

图 6 给出了合并—智能联合译码算法中使用不同合并系数的性能仿真。从图 6 可以看出,当系统使用合并—智能联合译码算法时,不同的合并系数将会影响系统的性能,其中合并系数 α 随信噪比变化时,系统的性能会略好一些;当误比特率为 10^{-4} 、合并系数为自适应系数时,系统性能比系数为 0.5 的好 0.4 dB 左右,比系数为 0.6 的好 1 dB 左右。

综上所述,合并—智能联合译码算法能够充分利用获得的两路信号,进一步降低信噪比和误码率,提高 RS 码的分布式编码协作系统的性能。

图 6 合并—智能联合译码算法中使用不同合并系数的性能仿真

Fig 6 Performance simulation of merge-intelligent joint decoding algorithm with different combining coefficients

4 结语

本文分析了 RS 码的编码协作系统,研究了基于 RS 码的简单联合译码算法、智能联合译码算法。在此基础上,提出了合并—智能联合译码算法,并通过仿真比较了简单联合译码算法、智能联合译码算法与合并—智能联合译码算法 3 种不同的联合译码算法的性能。结果表明:合并—智能联合译码算法能够充分利用获得的两路信号,使其分集增益,进一步降低信噪比和误码率,提高 RS 码的分布式编码协作系统的性能。

参考文献:

- [1] 徐朝军. RS 码译码算法及其实现的研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2006.
- [2] GORENSTEIN D, HERSTEIN I N. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4[J]. American Journal of Mathematics, 1961,83(1):71-78.
- [3] BERLEKAMP E R. Factoring polynomials over large finite fields[J]. Mathematics of Computation, 1970,24(111):713.
- [4] SUGIYAMA Y. A method for solving key equation for decoding Goppa Codes[J]. Information and Control, 1975,27(1):87-99.
- [5] 聂鹏. OFDM 系统中高速 RS 码的研究与实现[D]. 武汉:华中科技大学,2012.
- [6] 张愿,马社祥. 三协作节点的功率分配及其信道容量[J]. 计算机应用,2010,30(12):3151-3154.
- [7] HUNTER T E, NOSRATINIA A. Diversity through coded cooperation[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2006,5(2):283-289.
- [8] 张宗橙. 纠错编码原理和应用[M]. 北京:电子工业出版社,2003.
- [9] LIN S, COSTELLO J D. 差错控制编码:第 2 版[M]. 晏坚,何元智,潘亚汉,等,译. 北京:机械工业出版社,2007.
- [10] 李锦明,刘梦欣,成乃朋. RS 编码算法的优化与 FPGA 实现[J]. 电子技术应用,2020,46(2):76-79.
- [11] XU C L. Soft decoding algorithm for RS-CC concatenated codes in WiMAX system[C]//2007 IEEE 65th Vehicular Technology Conference, April 22—25, 2007. Dublin, Ireland.
- [12] 张绮瑾,杨鸿文. 量化噪声对衰落信道下 MRC 合并信噪比的影响[J]. 通信技术, 2008,41(7):37-38.

The Scheme Design of Distributed Cooperative System of RS Code

HUANG Yayun

(College of Electronic Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,
Nanjing Jiangsu 210000, China)

Abstract: In order to reduce the bit error rate of the RS code distributed coding cooperative system, based on the in-depth study of the RS codec algorithm, a merge-intelligent joint decoding algorithm is proposed. In this algorithm, a combiner is added to the intelligent decoding algorithm to make full use of the two signals (RS1 and RS2). When the bit error rate is 10^{-3} , compared with the simple joint decoding algorithm, the coding cooperation system using the combined-intelligent joint decoding algorithm can obtain a gain of 3.7 dB. In the case of using adaptive coefficients, the merge-intelligent joint decoding algorithm can make the coding cooperative system get the best performance. Therefore, merge-Intelligent joint decoding algorithm can effectively improve the performance of RS coding collaboration system.

Keywords: RS code; coded cooperation; merge-intelligent joint decoding algorithm

(责任编辑:李华云)