

加权三元区间数型多属性决策TOPSIS模型及其应用

谭秋月¹, 孙平安², 吴迪³, 吴永波⁴

1. 武夷学院数学与计算机学院, 福建武夷山 354300;
2. 武夷学院实验室管理中心, 福建武夷山 354300;
3. 山东正元地质资源勘查有限责任公司, 山东济南 250102;
4. 山东北国发展集团有限公司, 山东济南 250101

摘要:针对三元区间数距离计算中存在的问题,提出一种改进三元区间数距离公式的多属性决策TOPSIS模型。根据三元区间数的确定性和不确定性特点,用基于加权区间值的三元区间数距离代替三元区间数型TOPSIS模型中的欧氏距离,并以此计算三元区间数相对贴近度,按照三元区间数相对贴近度排序决策。通过一个边坡支护方案评价的例子计算分析,并与用其他方法得到的结果进行了对比,说明了方案的有效性。

关键词:加权三元区间数;多属性决策;TOPSIS模型;边坡支护;方案评价

中图分类号: O225 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5322(2021)04-0067-05

在区间数型不确定多属性决策中,由于在两参数区间数中上、下限间的各个数值可以认为取值机会均等,用其表示一个参量时,有时为了覆盖整个取值范围,区间可能会取得过大,这时如果再认为整个区间内取值机会均等,得出的结果就会出现大的误差。为此,用三元区间数不仅保持了参数的取值区间,而且还能突出取值可能性最大的重心,以弥补两参数区间数的不足^[1]。

三元区间数又称三参数区间数或三角模糊数^[2],近年来在不确定多属性决策中得到了较为广泛的应用。现已提出的三元区间数型多属性决策方法有多种^[3-9],其中尤其以TOPSIS方法最为受到关注^[6-7]。但采用TOPSIS方法进行三元区间数型多属性决策时,尽管三元区间数距离计算公式有多种,但均没有考虑三元区间数偏好区间值的影响,不能体现三元区间数中值的相对确定性与三元区间数上下确界中间取中值以外其他值的相对不确定性特点。在三元区间数型多属性决策中,尚无统一的三元区间数距离计算公式。为此,在归纳现有三元区间数距离计算公式的基础上,建立统一的三元区间数距离计算公

式,并将其应用于一个边坡支护方案评价。

1 三元区间数及其运算^[1-2]

1.1 三元区间数

设 \mathbb{R} 为实数集,若

$$\tilde{a} = [a^L, a^M, a^N]$$

式中, a^L 、 a^M 和 a^N 分别称为三元区间数的下确界、中值和上确界。

当 $0 < a^L < a^M < a^N \in \mathbb{R}$ 时,称 \tilde{a} 是一个三元区间数。三元区间数是规范区间数的一种具体化表示,其含义可参考文献[1-2]。

1.2 三元区间数运算

设有两个三元区间数 $\tilde{a} = [a^L, a^M, a^N]$, $\tilde{b} = [b^L, b^M, b^N]$ ($0 < a^L < a^M < a^N \in \mathbb{R}$, $0 < b^L < b^M < b^N \in \mathbb{R}$),其加法运算、减法运算、乘法运算、除法运算、数乘运算的具体表达式见文献[1-2]。

1.3 三元区间数距离

设有两个三元区间数 $\tilde{a} = [a^L, a^M, a^N]$, $\tilde{b} = [b^L, b^M, b^N]$,根据文献[3-7]可得 \tilde{a} 和 \tilde{b} 间的距离公式:

收稿日期:2021-08-21

基金项目:福建省青年教师专项(JA15515);福建省大学生创新项目(201510397029)。

作者简介:谭秋月(1980—),女,陕西咸阳市,副教授,硕士,主要研究方向为优化、图论等。

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\frac{(a^L - b^L)^2 + 4(a^M - b^M)^2 + (a^N - b^N)^2}{6}} \quad (1)$$

公式(1)是现有的,但不少情况下决策者对区间数中的取值是有偏好的,如有的喜欢保守,有的喜欢冒险。因此,对下确界及上确界进行加权,才更加符合实际。于是,我们对公式(1)进行改良。由式(1)导出

(1) 偏于保守型

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\frac{2(a^L - b^L)^2 + 3(a^M - b^M)^2 + (a^N - b^N)^2}{6}} \quad (2)$$

(2) 偏于冒险型

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\frac{(a^L - b^L)^2 + 3(a^M - b^M)^2 + 2(a^N - b^N)^2}{6}} \quad (3)$$

公式(1)~(3)可统一表示为:

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sqrt{\frac{\alpha(a^L - b^L)^2 + \beta(a^M - b^M)^2 + \gamma(a^N - b^N)^2}{6}} \quad (4)$$

式中, α, β, γ 为三元区间数中 3 个参数的加权系数,且满足 $\alpha \leq \beta, \gamma \leq \beta$ 。需要突出 a^M, b^M 时,还可以给定约束条件 $\beta > \alpha + \gamma$, 从而突出反映 a^M, b^M 的重要性和“最可能性”。

在公式(4)中, α, β, γ 取值不同,即可得到不同的三元区间数的距离计算公式。例如, α, β, γ 分别取 6、6、6,即为式(1); α, β, γ 分别取 3、3、3,即为式(3)。

2 三元区间数型多属性决策 TOPSIS 模型应用步骤

步骤 1: 建立三元区间数决策矩阵。

对具体方案的实际数据进行整理,得到三元

区间数型多属性决策矩阵 $\tilde{Y} = [y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^N]_{m \times n}$ 。

步骤 2: 确定“理想方案”和“负理想方案”。

设 I_+ 为越大越优型指标集合, I_- 为越小越优型指标集合,则“理想方案”和“负理想方案”分别为

$$[A^+] = \{ \max_i [y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^N] | i \in I_+, \min_i [y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^N] | i \in I_-, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \} = \{ [y_1^L, y_1^M, y_1^N], [y_2^L, y_2^M, y_2^N], \dots, [y_n^L, y_n^M, y_n^N] \} \quad (5)$$

$$[A^-] = \{ \min_i [y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^N] | i \in I_+, \max_i [y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^N] | i \in I_-, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \} = \{ [y_1^L, y_1^M, y_1^N], [y_2^L, y_2^M, y_2^N], \dots, [y_n^L, y_n^M, y_n^N] \} \quad (6)$$

步骤 3: 计算三元区间数规范化决策矩阵。

设规范化决策矩阵为 $\tilde{X} = ([x_{ij}])_{m \times n}$, 其中 $x_{ij} = [x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^N]$, 根据文献[4], 越大越优型规范化公式为

$$[x_{ij}^-] = [\frac{y_{ij}^L}{y_{ij}^{N, \max}}, \frac{y_{ij}^M}{y_{ij}^{N, \max}}, \frac{y_{ij}^N}{y_{ij}^{N, \max}}] \quad (7)$$

越小越优型规范化公式为

$$[x_{ij}^+] = [\frac{y_{ij}^{L, \min}}{y_{ij}^L}, \frac{y_{ij}^{M, \min}}{y_{ij}^M}, \frac{y_{ij}^{N, \min}}{y_{ij}^N}] \quad (8)$$

当通过以上公式规范化后,实际上所有指标均已转化成了“越大越优”型指标。

当用具体数据表示较困难时,通常用语言变量给出,然后通过适当转换,将其化为相应的三元区间数,其对应关系见表 1^[3,8]。

步骤 4: 计算加权三元区间数矩阵。

三元区间数数型多属性决策属性指标的权重可以是三元区间数,也可以是确定数,根据三元区间数乘法运算法则或数乘运算法则,即可求

表 1 语言价值变量及对应的三元区间数

Table 1 Language value variables and corresponding ternary interval numbers

权重语言的价值变量	评价值语言变量	对应三元区间数
非常不重要(FI)	非常差(FB)	[0, 0, 0.1]
不重要(I)	差(B)	[0, 0.1, 0.3]
不太重要(JI)	较差(JB)	[0.1, 0.3, 0.5]
一般(M)	一般(A)	[0.3, 0.5, 0.7]
比较重要(JZ)	较好(JG)	[0.5, 0.7, 0.9]
重要(Z)	好(G)	[0.7, 0.9, 1.0]
非常重要(FZ)	非常好(FG)	[0.9, 1.0, 1.0]

得加权三元区间数矩阵。

步骤5:计算各方案到“理想方案”和“负理想方案”的距离。

设方案 \tilde{A}_i 到“理想方案”的距离为 $d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)$, 到负理想方案的距离为 $d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-)$, 则有

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \alpha(a_i^L - a^{+L})^2 + \beta(a_i^M - a^{+M})^2 + \gamma(a_i^N - a^{+N})^2}{6}} \quad (9)$$

$$d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-) =$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n \alpha(a_i^L - a^{-L})^2 + \beta(a_i^M - a^{-M})^2 + \gamma(a_i^N - a^{-N})^2}{6}} \quad (10)$$

式中, α, β, γ 根据决策者偏好按定义4分别取值。

步骤6:计算相对贴近度。

设各方案的相对贴近度为 C_i , 根据TOPSIS法原理, 得到

$$C_i = \frac{d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-)}{d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^-) + d(\tilde{A}_i, \tilde{A}^+)} \quad (11)$$

步骤7:方案排序决策。

根据相对贴近度 C_i 大小排序, C_i 越大, 方案越优。

3 算例分析

3.1 问题背景

为便于比较, 这里采用文献[9]中 INSPUR 科技园边坡支护工程设计方案的例子计算分析。INSPER 科技园东边坡南北长 370 m, 因采石后回填建筑垃圾, 地质条件复杂, 边坡稳定性差, 在园区开发建设中需对其支护, 以保证施工期间和开挖后边坡稳定及周边环境的安全。为选择安全、合理、经济的支护方案, 选择了4家较有实力的设计院各自做出4个独立的设计方案(见表2)进行投标报价。由业内专家根据建设单位提出的要求进行综合评价确定评价指标, 综合考虑了建设单位提出的6项评价指标: 方案的结构安全性 x_1 、施工安全性 x_2 、工程报价 x_3 、施工工期 x_4 、绿化条件 x_5 及施工可控性 x_6 。其中有能定量表示的指

表2 边坡支护方案
Table2 Slope support scheme

单位	支护方案	结构安全性	施工安全性	工程报价/(万元)	施工工期/d	绿化条件	施工可控性
Y	上部土钉墙+下部锚索格构梁	好	好	[285,290,300]	[55,58,60]	非常好	好
B	上部锚杆+下部桩锚支护	非常好	差	[255,263,270]	[58,60,63]	差	较好
F	上部放坡+下部桩锚支护	较好	较差	[420,460,470]	[60,65,70]	好	非常好
M	预注浆+注浆花管	一般	非常好	[300,350,400]	[40,50,60]	较差	较差

标, 也有不能定量表示的定量指标; 有越大越优型的定量指标 (x_1, x_2, x_5, x_6), 也有越小越优的定量指标 (x_3, x_4), 均以三元区间数表示。由于报价一般都有最低价或二次报价, 评标专家对同一方案所给出的指标值并不完全相同, 且施工工期也有最早完工时间和最迟完工时间, 结果汇总统计

后, 每个方案的定量指标是以三元区间数给出的。定性指标用语言价值变量用表1对应的三元区间数表示。

3.2 计算过程

3.2.1 建立三元区间数决策矩阵

通过表1整理表2的决策矩阵。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.7,0.9,1.0] & [0.7,0.9,1.0] & [285,290,300] & [55,58,60] & [0.9,1.0,1.0] & [0.7,0.9,1.0] \\ [0.9,1.0,1.0] & [0,0.1,0.3] & [255,263,270] & [58,60,63] & [0,0.1,0.3] & [0.5,0.7,0.9] \\ [0.5,0.7,0.9] & [0.1,0.3,0.5] & [420,460,470] & [60,65,70] & [0.7,0.9,1.0] & [0.9,1.0,1.0] \\ [0.3,0.5,0.7] & [0.9,1.0,1.0] & [300,350,400] & [40,50,60] & [0.1,0.3,0.5] & [0.1,0.3,0.5] \end{bmatrix}$$

3.2.2 确定三元区间数“理想方案”和“负理想方案”。

由式(5)、(6)可得“理想方案”和“负理想方案”为

$$[\tilde{A}^+] = \{[0.9,1.0,1.0], [0.9,1.0,1.0], [255,263,270], [40,50,60], [0.9,1.0,1.0], [0.7,0.9,1.0]\}$$

$$[\tilde{A}^-] = \{[0.3,0.5,0.7], [0,0.1,0.3], [420,460,470], [60,65,70], [0,0.1,0.3], [0.1,0.3,0.5]\}$$

3.2.3 计算三元区间数规范化决策矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0.700,0.900,1.111] & [0.700,0.900,1.111] & [0.895,0.907,0.900] & [0.727,0.862,1.000] & [0.900,1.000,1.111] & [0.700,0.900,1.111] \\ [0.900,1.000,1.111] & [0.000,0.100,0.333] & [1.000,1.000,1.000] & [0.690,0.833,0.952] & [0.000,0.100,0.333] & [0.500,0.700,1.000] \\ [0.500,0.700,1.000] & [0.100,0.300,0.556] & [0.607,0.572,0.574] & [0.667,0.769,0.857] & [0.700,0.900,1.111] & [0.900,1.000,1.111] \\ [0.300,0.500,0.778] & [0.900,1.000,1.111] & [0.850,0.751,0.675] & [1.000,1.000,1.000] & [0.100,0.300,0.556] & [0.100,0.300,0.556] \end{bmatrix}$$

3.2.4 计算加权三元区间数矩阵

各指标通过评标专家打分,采用确定性权

重,即 $w = (0.30, 0.15, 0.20, 0.15, 0.10, 0.10)$,由三元区间数乘法法则计算加权三元区间数矩阵为

$$[\tilde{A}_w] =$$

$$\begin{bmatrix} [0.2100,0.2700,0.3000] & [0.1050,0.1350,0.1500] & [0.1789,0.1759,0.1700] & [0.1091,0.1034,0.1000] & [0.0900,0.1000,0.1000] & [0.0700,0.0900,0.1000] \\ [0.2700,0.3000,0.3000] & [0.0000,0.0150,0.0450] & [0.2000,0.1939,0.1889] & [0.1034,0.1000,0.0952] & [0.0000,0.0100,0.0300] & [0.0500,0.0700,0.0900] \\ [0.1500,0.2100,0.2700] & [0.0150,0.0450,0.0750] & [0.1214,0.1109,0.1085] & [0.1000,0.0923,0.0857] & [0.0700,0.0900,0.1000] & [0.0900,0.1000,0.1000] \\ [0.0900,0.1500,0.2100] & [0.1350,0.1500,0.1500] & [0.1700,0.1457,0.1275] & [0.1500,0.1200,0.1000] & [0.0100,0.0300,0.0500] & [0.0100,0.0300,0.0500] \end{bmatrix}$$

相应地,“理想方案”和“负理想方案”如下:

$$[\tilde{A}_w^+] = \{ [0.2700, 0.3000, 0.3000], [0.1350, 0.1500, 0.1500], [0.2000, 0.1939, 0.1889], [0.1500, 0.1200, 0.1000], [0.0900, 0.1000, 0.1000], [0.0900, 0.1000, 0.1000] \};$$

$$[\tilde{A}_w^-] = \{ [0.0900, 0.1500, 0.2100], [0.0000, 0.0150, 0.0450], [0.1214, 0.1109, 0.1085], [0.1000, 0.0923, 0.0857], [0.0000, 0.0100, 0.0300], [0.0100, 0.0300, 0.0500] \}.$$

3.2.5 计算各方案到“理想方案”和“负理想方案”的距离

根据公式(4), α, β, γ 分别取1、4、1,由公式(9)、公式(10)得, $d_1=0.1037, d_2=0.2723, d_3=0.3170, d_4=0.3336, d_5=0.4508, d_6=0.2769, d_7=0.2338, d_8=0.2159$ 。

3.2.6 计算相对贴近度

根据式(11)求得: $C_1=0.8130, C_2=0.5041, C_3=0.4245, C_4=0.3928$ 。

3.2.7 方案排序决策

根据 C_i 大小,方案排序为 $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$,即Y公司的方案为最优方案,其次为B公司方案、F公司方案、M公司方案。

如果要求方案选择偏于保守,则 α, β, γ 分别取2、3、1,求得

$$C_1=0.7882, C_2=0.5014, C_3=0.4119, C_4=0.3942, \text{方案排序为 } C_1 > C_2 > C_3 > C_4.$$

如果要求方案选择偏于冒险,则 α, β, γ 分别取1、3、2,求得

$$C_1=0.8165, C_2=0.5071, C_3=0.4308, C_4=$$

0.3920,方案排序为: $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$ 。

3.3 结果分析

这个结果与最终专家确定的中标的结果一致,也与文献[9]得到的结果相符。与文献[10]结果对比,前两家公司方案一致,后两家公司方案顺序不同,其原因在于文献[10]确定的“理想方案”有误,将 $[0.9, 1.0, 1.0]$ 误写成 $[0.7, 0.9, 1.0]$ 。

尽管采用加权的三元区间数TOPSIS模型计算的相对贴近度 C_i 有所不同,但对方案优劣排序并无影响,说明方案的排序相对稳定。

三元区间数中值的相对确定性与其上、下确界中间取中值以外其他值的相对不确定性要求其运算时考虑中值及其下确界的分担比例,即权重,建立基于加权区间值的三元区间数距离公式是完全必要的。

基于加权区间值的区间数型多属性决策TOPSIS模型体现了三元区间数的相对确定性与不确定性,兼顾了决策者的不同偏好,评价结果更加符合实际。

参考文献:

[1] 胡启洲,张卫华,于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用[J]. 中国工程科学,2007,9(3):47-51.
 [2] 刘秀梅,赵克勤. 区间数决策集对分析[M]. 北京:科学出版社,2014.
 [3] 许叶军,达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术,2007,29(9):1469-1471.
 [4] 胡启洲,于莉,张爱萍. 基于三元区间数的多指标决策方法[J]. 系统管理学报,2010,19(1):25-30.
 [5] CHEN C T. A fuzzy approach to select the location of the distribution Center[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 118(1): 65-73.

- [6] WANG J W, CHENG C H, HUANG K C. Fuzzy hierarchical TOP-SIS for supplier selection[J]. Applied Soft Computing, 2009, 9(1): 377-386.
- [7] 罗党, 孙慧芳, 毛文鑫. 基于三角模糊数-TOPSIS的绿色施工评标方法[J]. 华北水利水电大学学报(自然科学版), 2016, 37(2): 73-77.
- [8] 陈晓红, 阳熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 278-282.
- [9] 王渭明, 王国富, 冯玉国. 三角模糊数型多属性决策灰色优化模型及其在工程设计方案评价中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(12): 21-27.
- [10] 周洪. 三元区间数型多属性决策正交投影模型及其在边坡支护方案评价中的应用[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(9): 182-189.

TOPSIS Model of Multi-attribute Decision Making with Weighted Ternary Interval Number and Its Application

TAN Qiuyue¹, SUN Ping'an², WU Di³, WU Yongbo⁴

1. School of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan Fujian 354300, China ;
2. Laboratory Management Center, Wuyi University, Wuyishan Fujian 354300, China ;
3. Shandong Zhengyuan Geological Resources Exploration Co. , Ltd, Jinan Shandong 250102, China ;
4. Shandong Beiguo Development Group Co. , Ltd, Jinan Shandong 250101, China

Abstract: Aiming at the problems existing in the calculation of ternary interval number distance, a multi-attribute decision-making TOPSIS Model Based on improved ternary interval number distance formula is proposed. According to the certainty and uncertainty characteristics of ternary interval number, the model uses the ternary interval number distance based on weighted interval value to replace the Euclidean distance in ternary interval number TOPSIS model, calculates the relative closeness of ternary interval number, and makes decisions according to the relative closeness of ternary interval number. An example of slope support scheme evaluation is calculated and analyzed, and compared with the results obtained by other methods to illustrate the effectiveness of this method.

Keywords: weighted ternary interval number; multi-attribute decision making; TOPSIS model; slope support; scheme evaluation

(责任编辑:张英健)